ARITMÉTICA

DOS NÚMEROS INTEIROS

Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar

A presente versão está disponível em minha página pessoal em formato .pdf O nosso endereço é `http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/` Nesta página mantemos seções como *Errata*, *Comentários* e *Atualizações*. A versão anterior está disponível no Arquivo Escolar `http://arquivoescolar.org/`

Solicitamos não disponibilizar o arquivo em outros endereços da internet.

Esta versão foi testada em sala de aula várias vezes, por mim e por colegas professores, e já foram feitas muitas correções, de modo que pensamos que está adequada para uso em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor através do endereço roberto@dm.ufscar.br

Figura da capa: Construída pelo autor com o aplicativo Inkscape. Os discos em fileiras ascendentes indicam o progresso da percepção dos números pelo homem. As cores dos discos se tornam mais claras de baixo para cima, ilustrando que essa percepção caminha do mais concreto para o mais abstrato. A lista inferior mostra os números naturais, que são a base de nossos estudos. A lista intermediária mostra os números primos, indicando os primeiros estudos da constituição quantitativa dos números naturais. A lista superior mostra o zero e os números negativos, a primeira extensão do conjunto dos números naturais. A presença da forma "disco" lembra o antigo aforisma: *O número gera a forma na matriz do espaço.*

Este texto foi editado em LaTeX 2ε pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados.

Roberto Ribeiro Paterlini

Aritmética dos números inteiros

um texto para licenciandos e professores de Matemática

Departamento de Matemática, UFSCar

São Carlos, Brasil

Data da primeira edição: 25 de junho de 2008

Segunda edição: em elaboração. Data desta versão: 19 de fevereiro de 2017

Sumário

Apresentação v

I Aritmética dos números naturais 1

1 Os Números Naturais e a Arte de Contar 3
1.1 Introdução 3
1.2 Gênese dos números naturais 4
1.3 Contar e representar 5
1.4 O mais antigo sistema de numeração 7
1.5 Sistemas primitivos de contagem 8
1.6 Álgebra dos sistemas de numeração aditivos 10
1.7 Sistemas de numeração aditivos históricos 11
1.8 Problemas 16
1.9 Sobre a gênese psicológica dos números naturais 18
1.10 Sugestões de atividades 19

2 Sistemas de numeração posicionais 21
2.1 Introdução 21
2.2 Gênese dos sistemas posicionais 21
2.3 Problemas 24
2.4 O sistema posicional decimal 24
2.5 Problemas 28
2.6 Sistemas posicionais em uma base qualquer 30
2.7 Problemas 35
2.8 Sistemas de numeração posicionais históricos 37
2.9 Pequena história do sistema de numeração decimal 39
2.10 O sistema de numeração da língua portuguesa 41
2.11 Os números e a legislação brasileira 45
2.12 Problemas adicionais 45
2.13 Sugestões de atividades orientadas 47

3 A arte de calcular 49
3.1 Introdução 49
3.2 A adição 49
3.2.1 Conceito de adição 50
3.2.2 Algoritmos para a adição 51
3.2.3 Gênese dos algoritmos de adição para sistemas posicionais 52
3.2.4 Problemas 56

3.3 A subtração . . . 58
3.3.1 Conceito de subtração . . . 58
3.3.2 Algoritmos para a subtração . . . 59
3.3.3 Problemas . . . 62
3.4 Ordenação dos números naturais . . . 63
3.4.1 Problemas . . . 65
3.5 A multiplicação . . . 65
3.5.1 Conceito de multiplicação . . . 65
3.5.2 Algoritmos para a multiplicação . . . 67
3.5.3 Problemas . . . 71
3.6 A divisão . . . 73
3.6.1 Conceito de divisão . . . 73
3.6.2 Algoritmos para a divisão . . . 75
3.6.3 Problemas . . . 79
3.7 Verificação de cálculos aritméticos . . . 80
3.8 Problemas adicionais . . . 82
3.9 Sugestões de atividades orientadas . . . 86
3.10 Temas para investigação . . . 86

II Introdução à teoria dos números naturais 89

4 O ideal matemático da Antiga Grécia 91
4.1 Introdução . . . 91
4.2 Problemas . . . 92
4.3 Números e Geometria . . . 93
4.4 Problemas . . . 95
4.5 Zero e os números naturais . . . 97
4.6 Problemas . . . 99
4.7 Par e ímpar . . . 99
4.8 Problemas . . . 104
4.9 Análise dos números naturais . . . 107
4.10 Problemas . . . 111
4.11 Teoria aditiva dos números naturais . . . 114
4.12 Problemas adicionais . . . 116
4.13 Pequeno exemplo de investigação . . . 119
4.14 Temas para investigação . . . 120
4.15 Sugestões de atividades orientadas . . . 122

5 Números primos e compostos 125
5.1 Introdução . . . 125
5.2 Propriedades dos divisores de um número natural . . . 125
5.3 Problemas . . . 128
5.4 Reconhecimento dos primos . . . 131
5.5 Problemas . . . 133
5.6 O crivo de Eratóstenes . . . 134
5.7 Problemas . . . 137
5.8 Infinitude dos primos . . . 138
5.9 Problemas . . . 139

5.10 O máximo divisor comum . . . 140
5.11 Problemas . . . 143
5.12 Algumas identidades algébricas importantes . . . 145
5.13 Problemas . . . 148
5.14 Comentários adicionais . . . 149
5.15 Problemas adicionais . . . 149
5.16 Temas para investigação . . . 153

6 O algoritmo da divisão e aplicações **157**
6.1 Introdução . . . 157
6.2 O Teorema do Algoritmo da Divisão . . . 157
6.3 Problemas . . . 159
6.4 Existência e unicidade em sistemas posicionais . . . 160
6.5 Problemas . . . 162
6.6 Problemas adicionais . . . 162
6.7 Temas para investigação . . . 164

7 O Teorema Fundamental da Aritmética **165**
7.1 Introdução . . . 165
7.2 Propriedades adicionais do máximo divisor comum . . . 165
7.3 Problemas . . . 167
7.4 O Teorema Fundamental da Aritmética . . . 168
7.5 Problemas . . . 169
7.6 Aplicações . . . 170
7.7 Problemas . . . 173
7.8 Os números perfeitos . . . 174
7.9 Problemas . . . 175
7.10 Problemas adicionais . . . 176
7.11 Temas para investigação . . . 177

8 Os ternos pitagóricos **179**
8.1 Introdução . . . 179
8.2 Os ternos pitagóricos . . . 179
8.3 Problemas . . . 182
8.4 Ternos pitagóricos, o estado da arte . . . 182
8.5 Problemas . . . 184
8.6 Pierre de Fermat e seu último teorema . . . 185
8.7 Problemas adicionais . . . 185
8.8 Tema para investigação . . . 186

III Introdução à teoria dos números inteiros **187**

9 Os números inteiros **189**
9.1 Introdução . . . 189
9.2 A qualidade dos números negativos . . . 189
9.3 O conjunto dos números inteiros . . . 190
9.4 Problemas . . . 193
9.5 Princípios fundamentais . . . 193

9.6 Problemas 194
9.7 Teoria dos números inteiros 195
9.8 Problemas 199
9.9 Problemas adicionais 199
9.10 Temas para investigação 199

10 O Método da Indução Completa **203**
10.1 Introdução 203
10.2 Vale para 1, 2, 3, ..., n, vale sempre? 203
10.3 Problemas 204
10.4 O Método da Indução Completa 204
10.5 Problemas 208
10.6 O segundo princípio da Indução Completa 209
10.7 Problemas 211
10.8 Problemas adicionais 212
10.9 Temas para investigação 214

11 A equação $ax + by = c$ em $\mathbb{Z}$ **217**
11.1 Introdução 217
11.2 Exemplos iniciais 217
11.3 O método da pulverização 218
11.4 Uma fórmula para as soluções 219
11.5 Problemas 220
11.6 Temas para investigação 221

A Lista dos primos até 1700 **223**

B Respostas e sugestões a alguns problemas **225**

C Créditos das figuras **235**

Bibliografia e Referências **239**

Apresentação

Meu coração propaga-se na noite.[1]

Sobre este texto

Este é um texto sobre Aritmética Elementar, que inclui números inteiros, sistemas de numeração, operações aritméticas, e uma introdução à Teoria dos Números, escrito com a intenção de apoiar o estudo desses assuntos em cursos de formação inicial de professores de Matemática, particularmente licenciatura.

Durante anos utilizamos anotações pessoais sobre Aritmética nos cursos de formação de professores de Matemática da UFSCar, com a ideia de que o estudo dos números é uma atividade imprescindível para sua formação e para o desenvolvimento da Matemática. Durante os anos de 2006 e 2007 nos dedicamos a revisar e ampliar essas notas e transformá-las em um livro, de modo que estudantes e professores interessados possam ter esse material à disposição.

A escolha do material aqui exposto difere em parte dos livros de Teoria dos Números escritos para o mesmo segmento de estudantes. Além dos assuntos de costume (divisibilidade, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, classes de congruências, etc.), enfatizamos bastante o estudo dos sistemas de numeração e das operações fundamentais da Aritmética e seus algoritmos. Esta opção representa a conclusão de estudos que temos feito com estudantes calouros de nossos cursos de licenciatura e com professores da escola básica em inúmeras atividades de formação continuada. O licenciando, ao realizar seus estudos como preparação para o exercício de sua profissão, necessita reconstruir seus conhecimentos sobre aritmética elementar sob o ponto de vista crítico da Matemática Superior. Caso contrário, se conservar como conhecimento nesta área apenas aquele que vivenciou na escola básica, tenderá a reproduzir posições cristalizadas.

O método

Ao compor esse material acompanhamos as orientações do método *ensino da Matemática através de problemas* assim como do *método genético*.

O uso de problemas como recurso didático está bem estabelecido na tradição matemática, e particularmente apreciamos a aplicação do método com o objetivo de desenvolver a arte de investigar em Matemática. Assim como aquele que investiga aprende, o que aprende deve fazê-lo praticando a arte de investigar, sem o que não é possível obter um conhecimento significativo. Para facilitar esse caminho ao estudante apresentamos um texto com muitos problemas clássicos e abertos, assim como problemas envolvendo ideias inesperadas, “fora do lugar”. Às vezes repetimos problemas ao longo do texto como uma estratégia de aprendizagem. Observamos, em nossos trabalhos com estudantes, que particularmente úteis são as seções “temas para investigação” colocadas no final de cada capítulo, a partir do terceiro.

---

[1] Fragmento de hino asteca.

Por outro lado, o ensino da Matemática exige também a apresentação de conceitos e ideias elaboradas ao longo da história. No meio matemático a expressão *método genético* parece ter sido utilizada pela primeira vez por Otto Toeplitz em 1926. Autor de um livro didático [107] de Cálculo Diferencial e Integral em que usou esse método, Toeplitz estava convencido de que os estudantes adquirem compreensão dos conceitos e métodos do Cálculo apenas quando se lhes apresenta sua gênese e desenvolvimento. Harold M. Edwards também utilizou o método genético em sua apresentação [31] do Último Teorema de Fermat. Segundo este autor, a melhor maneira de superar a dificuldade em aprender uma teoria matemática abstrata é ignorar os tratados modernos até que se tenha estudado sua gênese.

Dessa forma, neste livro, a sequencialização dos assuntos tem como fio condutor a gênese dos conceitos e técnicas, e a História da Matemática é a nossa principal inspiração.

Optamos por um estilo razoavelmente detalhado e dialógico, com ampla explicação das ideias. Pensamos que dessa forma o texto poderá ser utilizado em diversas situações de ensino e aprendizagem, e o professor fica com liberdade de adotar diferentes estratégias. Particularmente apreciamos estratégias que incentivam o estudante a realizar um estudo relativamente autônomo, mais dirigido à prática da pesquisa. De qualquer forma, o que irá realmente atrair o estudante é o impulso para investigar as propriedades dos números.

Aos estudantes, isto é, todos nós

Certamente que o estudo dos números é muito necessário para a sociedade devido às aplicações práticas e técnicas, desde as mais simples até as mais sofisticadas. Muitos ainda estudam os números por uma questão de gosto ou prazer pessoal. Pensamos que estudar os números é também uma tarefa, pois precisamos manter aceso esse conhecimento, e avançar.

Agradecimentos

Todo o material aqui disposto foi construído através de consultas a inúmeras fontes, esforçamo-nos em citá-las todas na bibliografia (página 239). Constatamos assim que participamos de uma construção coletiva. Optamos por referir no texto uma pequena parte das fontes, de outra forma iríamos sobrecarregar o estilo. Acompanhamos o costume em nossa área de não mencionar as fontes dos problemas em livros textos para estudantes.

Muito importante foi a participação dos estudantes dos cursos de Matemática da UFSCar, os quais deram o tom necessário para que este trabalho efetivamente atenda a uma necessidade. Desta forma agradecemos a atenção e envolvimento das turmas de 1995 a 2008 com as quais trabalhamos os assuntos aqui estudados. Agradecemos também às diversas turmas de professores que participaram de nossos cursos de formação continuada. Sentimo-nos verdadeiramente agraciados com as oportunidades que tivemos de contar com esses colaboradores.

Nossos agradecimentos se estendem aos colegas professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, particularmente ao grupo de ensino da Matemática, que nos proporcionou a oportunidade de desenvolver uma clareza sobre essa importante atividade. Pensamos ser adequado citar nomes, mesmo correndo o risco de omitir alguns: Nelio Baldin, Yuriko Y. Baldin, Pedro L. A. Malagutti, Luiz J. Bettini, Yolanda K. S. Furuya, Waldeck Schützer, João C. V. Sampaio, Paulo A. S. Caetano, Sadao Massago, Jean P. Gonçalves, Fabio G. Figueira.

Finalmente dedico esse livro aos meus familiares, com muito carinho.

São Carlos, 25 de junho de 2008. O autor.

Observação sobre essa edição (em elaboração).

Esta versão pertence à segunda edição e está em andamento. Incorpora atualizações e vários acréscimos e melhoramentos. Procuramos uma linguagem mais explicativa e um diálogo mais claro entre o autor e o estudante. Quando possível, um triálogo, considerando também presente o futuro estudante daquele que ora pretende se tornar um professor.

Pensamos com isso estimular mais a autonomia do estudante. Nosso entendimento é que o conhecimento é construído internamente e não pode ser imposto. É preciso haver ajuda mas sem desestimular a liberdade.

Agradecemos aos estudantes e professores que ofereceram sugestões e participaram dos estudos realizados com esse texto.

São Carlos, 19 de fevereiro de 2017. O autor.

Parte I

Aritmética dos números naturais

Capítulo 1

Os Números Naturais e a Arte de Contar

Quanto é um mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um? perguntou a Rainha Branca. — Não sei — respondeu Alice — Perdi a conta.[1]

1.1 Introdução

Como surgiram os números naturais, e o que são eles?
Como o homem constrói seu entendimento desses números desde a mais tenra idade?
O que é um sistema de representação dos números naturais?
O que são os sistemas de numeração aditivos?

Apresentamos neste capítulo informações e reflexões sobre essas questões.

Usando sua capacidade de abstração e seu aparato lógico-dedutivo, o homem constrói o conceito do que chamamos de número natural. Essa construção é estimulada pelo meio ambiente e pela vida social. Forma-se, em cada indivíduo, um conceito, interno e residente na sua psique, abrangendo um campo que pode ser amplo ou restrito, rígido ou flexível, difuso ou preciso, o que depende de várias circunstâncias.

Nesse estudo trabalhamos com jovens que já construíram esse conceito mas que eventualmente podem expandi-lo e torná-lo mais amplo e preciso.

Por outro lado, com a finalidade de aplicar social e cientificamente o conceito de número natural, a humanidade desenvolve, desde há muito tempo, a Arte de Contar. Para isso inventou os mais diferentes sistemas de numeração, começando com os mais simples, e chegou à invenção do sistema decimal, hoje difundido em todo o mundo. Desenvolveu também muitas formas de representação dos números naturais, utilizando as linguagens falada e escrita e as linguagens simbólicas, pictográficas e de sinais.

Vejamos um pouco dessa história, e "felizes iniciemos um curso de ciência e engenhosos estudos".[2]

[1] Lewis Carrol, *Alice do outro lado do espelho* (adaptado). [17], Capítulo 9.
[2] William Shakespeare, *A Megera Domada* (adaptado). [100], Ato I, Cena I.

1.2 Gênese dos números naturais

Desde o alvorecer do desenvolvimento de sua autoconsciência o homem constrói o conceito de *unidade*, um segredo que se desvela paulatinamente. Aquele que designamos *número um* é um representante dessa essência, trazendo a ideia de começo. É o que inicia e dá ritmo. Revela-se, desdobrando-se, dando origem a todos os outros números, em infinitas combinações. É, ao mesmo tempo, o todo e a parte.

Do ponto de vista quantitativo, o *número um* representa a nossa percepção diante de um objeto considerado em sua unidade. Em outros termos, *um* é um conceito abstrato, representante de uma ideia universal, que construímos quando observamos, do ponto de vista quantitativo, cada objeto em sua unidade.

O número um é também chamado *unidade*.

Designamos o número um com o símbolo 1

Desenvolvendo nossa capacidade de abstração, reconhecemos a diversidade das coisas. Observando a reunião de dois objetos, construímos o conceito do número que designamos por *dois*. Mais exatamente, *dois* é um conceito abstrato que construímos quando observamos, do ponto de vista quantitativo, um objeto reunido com outro, cada um considerado em sua unidade.

Designamos o número dois com o símbolo $1 + 1$

Nessa simbologia o sinal + representa reunião. Traduz o movimento mental que fazemos ao reunir uma unidade com outra. Dessa forma representamos o número dois como "1 reunido com 1", ou seja, $1 + 1$.

Observando a reunião de três objetos, construímos o conceito de número *três*. Representamos o número três como a reunião de três unidades: $1 + 1 + 1$. Reconhecemos também que três é construído mediante o movimento de reunir uma unidade a duas unidades já reunidas, obtendo $1 + (1 + 1) = 1 + 1 + 1$, ou, de forma equivalente, $(1 + 1) + 1 = 1 + 1 + 1$.

E assim, ordenadamente, construímos os números subsequentes: $1 + 1 + 1 + 1$ (chamado quatro), $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (chamado cinco), etc., sendo cada um desses números uma reunião de uma quantidade precisa de unidades.

Construímos os números com uma ordem. O número 1 é o primeiro, o número $1 + 1$ é o segundo, o número $1 + 1 + 1$ é o terceiro, e assim sucessivamente. Observamos que, dado um número, o único número que lhe segue nessa ordem é obtido acrescentando-se uma unidade às unidades do número dado. Considerando o número dois e os seguintes, observamos que, dado um desses números, o número que lhe antecede nessa ordem é único.

Obtemos dessa forma as ideias de sucessor e de antecessor. Dado um número natural a, seu *sucessor* é indicado por $a+1$, e é o número construído adicionando-se uma unidade às unidades de a. Dado um número natural $a \neq 1$, seu *antecessor* é indicado por $a - 1$, e é o número cujo sucessor é a. Temos a seguinte fórmula geral:

$$\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{a \text{ unidades}} + 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a+1 \text{ unidades}} \tag{1.1}$$

Reconhecendo que podemos repetir esse processo quantas vezes quisermos, começando com o número 1, vemos que construímos ordenadamente um conjunto infinito de números, sendo cada um deles uma reunião de uma quantidade precisa de unidades.

O conjunto dos números naturais é, portanto, o conjunto dos números

$$1, \quad 1+1, \quad 1+1+1, \quad 1+1+1+1, \ldots$$

Estivemos estudando aspectos da origem psicológica dos números naturais. Outros detalhes serão observados na Seção 1.9, pág. 18, em que incluímos pequeno estudo da gênese do número na criança segundo a epistemologia genética de Jean Piaget.

1.3 Contar e representar

Para utilizar o conceito de número natural o homem construiu métodos de contagem.

Contar significa enumerar, ou relacionar sucessivamente os números naturais.[3]

Para contar necessitamos de um sistema de numeração e de uma linguagem. Um sistema de numeração provê um método de contagem, e a linguagem, uma forma de expressão.

Os sistemas de numeração são construídos das mais variadas formas.

Chamamos de *sistema de numeração* a qualquer método destinado a relacionar ordenadamente os números naturais.

Do ponto de vista da Matemática uma função básica de qualquer sistema de numeração é que ele deve determinar, implícita ou explicitamente, uma regra para o sucessor de qualquer número natural. Destacamos ainda duas importantes qualidades de um sistema de numeração: i) todo número natural tem representação no sistema; ii) a representação de qualquer número natural no sistema é única. Entretanto um sistema de numeração pode ser muito útil e não possuir essas qualidades.

Um sistema de numeração, para ter utilidade, necessita de uma linguagem para representar os números. A linguagem associa a cada número um vocábulo, um símbolo, um ícone ou um sinal. O homem inventou os mais diferentes métodos para representar os números utilizando as mais diversas linguagens, levando em conta suas necessidades de aplicação e os meios técnicos disponíveis.

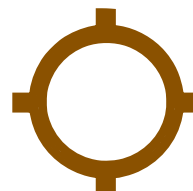
Exemplos de representações de números em linguagens faladas ou escritas.

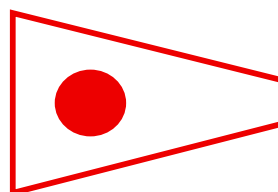
unus, duo, tres, ...
um, dois, três, ...
un, deux, trois, ...
one, two, three, ...
eins, zwei, drei, ...
iti, ni, san, ...

[3]O termo *contar* também significa verificar a quantidade de elementos de um determinado conjunto.

1 , 2 , 3 , ...
I , II , III , ...
• , •• , ••• , ...
| , ⊢ , ⊢| , ...
α , β , γ , ...
一 , 二 , 三 , ...

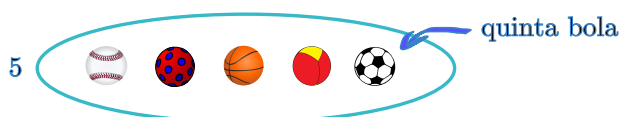
Exemplos de representações de números em linguagens simbólicas.

O desenho ao lado mostra o ícone para o número mil usado em Creta por volta de 1300 a. C. Este é um exemplo de representação pictográfica.

Exemplos de representações de números em linguagens de sinais:

Representação do número 7 na Linguagem Brasileira de Sinais (LIBRAS).

Representação do número 1 no código marítimo de sinalização.

Em Matemática às vezes se usa o vocábulo *numeral* para designar o nome, ou o símbolo, ou o ícone, que um número recebe em uma linguagem. Assim, um, one, unus, |, I, 1, etc, são exemplos de numerais que representam a unidade. O vocábulo *número*, por sua vez, indica a ideia abstrata. Entretanto, na linguagem escrita e falada não costumamos usar o termo numeral. Assim, dificilmente escrevemos "o número representado pelo numeral 5 é ímpar", mas sim "o número 5 é ímpar", ou mais simplesmente "5 é ímpar".

De posse de um sistema de numeração podemos contar os objetos de uma coleção, por exemplo, as bolas de uma cesta. A primeira providência é estabelecer uma ordem nos objetos. Podemos fazer isso colocando-os em uma fila. Em seguida contamos: primeira, segunda, terceira, etc, apontando cada bola por sua vez. Vemos que o conjunto tem 5 bolas.

Apressamo-nos em explicar que a contagem se faz com os números ordinais: primeiro, segundo, terceiro, ..., cada um deles se refere a uma determinada bola listada na posição respectiva. No caso da nossa ilustração a bola de futebol tricampeã é a *quinta bola*. O número cardinal 5 por sua vez corresponde à totalidade das bolas na coleção.

Na linguagem comum nos acostumamos a usar os números cardinais um, dois, três, ... no lugar dos ordinais. É comum chamar a bola tricampeã em nossa lista de "bola cinco", o que não é formalmente correto. Um outro exemplo para explicar melhor essa questão. Dizemos por costume "hoje é trinta de janeiro", quando o correto seria "hoje é o trigésimo dia de janeiro". A palavra trigésimo se refere a um dia específico de uma lista de dias, enquanto que trinta se refere à quantidade de dias da lista até aquele dia.

1.4 O mais antigo sistema de numeração

A prática de esculpir entalhes em pedaços de madeira, ossos ou em paredes de cavernas parece ter sido comum na pré-história européia, entre 35000 e 20000 a. C., e muitos testemunhos arqueológicos foram encontrados. Em uma escavação arqueológica, realizada no território da antiga Checoslováquia, foi achado um osso de lobo no qual estão gravados 55 cortes transversais. Os 25 primeiros cortes estão agrupados de 5 em 5. Isso evidencia que se trata de um antigo registro de números. Especialistas determinaram a idade de 30000 anos para esse achado arqueológico.

Esse registro nos sugere qual deve ter sido o mais antigo sistema de numeração utilizado por aqueles povos:

$$| \quad || \quad ||| \quad |||| \quad \ldots$$

As características desse sistema são:

1) Trata-se de um sistema de numeração com um único símbolo, a saber, $|$, representando a unidade.

2) Dada a representação de um número, para se obter a representação do sucessor basta acrescentar um símbolo $|$.

Denominamos a esse sistema de numeração de *sistema aditivo de base um*, ou, simplesmente, de *sistema de base um*. Observe que as características descritas definem perfeitamente um sistema de numeração, pois elas nos dão uma regra para determinar o sucessor de qualquer número. Esse sistema é uma representação muito próxima da ideia da construção dos naturais, e assim tem as duas qualidades desejáveis para um sistema de numeração: todo número natural tem representação no sistema, e ela é única.

O sistema de numeração de base um era conveniente para o homem pré-histórico, cujas necessidades de contar eram certamente poucas. O uso desse sistema em uma civilização como a nossa traria sérios inconvenientes. Vamos apontar algumas desvantagens do sistema de base um em relação ao sistema decimal que hoje utilizamos.

a) *Reconhecimento visual de um número.* Mesmo se considerarmos valores numéricos baixos, por exemplo,

$$||||||||||||||||||||||||||||||||||$$

vemos que para reconhecer este número é necessário contar a quantidade de símbolos $|$, e não basta olhar rapidamente para a representação. No sistema decimal a representação desse número é 34, que proporciona um reconhecimento visual imediato.

b) *Espaço ocupado pela representação.* A representação escrita de um número no sistema de base um ocupa muito espaço, mesmo para valores modestos.

c) *Implementação de algoritmos.* O sistema de base um não permite o desenvolvimento de algoritmos compactos para se efetuar as operações aritméticas. Por exemplo, a adição de dois

números deve ser feita mediante o ajuntamento dos símbolos que compõem cada um deles:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | = | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Do ponto de vista conceitual esse algoritmo é muito simples. Mas imagine o incômodo que teríamos se o usássemos para fazer compras ou para organizar a folha de pagamentos de salários de uma empresa.

> LIQUIDAÇÃO TOTAL
>
> | | | | | | | | | | |% de desconto
>
> | fogão por apenas | | | | | | | | | | prestações de
>
> R$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

No sistema de numeração de base um a visualização dos números pode ser melhorada se agruparmos os símbolos | em grupos de cinco, por exemplo, como o fizeram os primitivos habitantes das cavernas. Se convencionarmos que esses agrupamentos serão indicados com a sobreposição do sinal ╳ não é difícil ver que número está representado por

𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | | |

Para usar este método precisamos saber contar e conhecer as somas $5+5$, $5+5+5$, etc.

Depois de usar muitas vezes este sistema alguém pode ter tido a ideia de sintetizar a representação substituindo o símbolo 𝍸 por ╳ . Alguém pode ter usado essa mesma ideia para agrupamentos de dez unidades, e, em algum momento, o símbolo X passou a ser usado para indicar o valor dez. Seria essa a origem do algarismo romano X como símbolo do número dez?

1.5 Sistemas primitivos de contagem

A Etnologia é o ramo da Antropologia que estuda a cultura dos povos naturais. Certas tribos viveram isoladas durante muitos séculos, e sua cultura, às vezes bastante primitiva, foi preservada da influência da nossa civilização. Os etnólogos, ao estudar os usos, costumes e linguagens dessas tribos, descobriram os mais variados sistemas de numeração.

O estudo dos sistemas de numeração utilizados pelos povos autóctones pode ser útil de duas maneiras. Primeiro, ele nos fornece diversos exemplos de métodos de contagem. Segundo, com esse estudo podemos compreender melhor o processo cognitivo da numeração.

Indígenas da Ilhas Murray, situadas no estreito de Torres, entre a Austrália e a Nova Guiné, utilizavam os seguintes vocábulos para contar:

netat	(um)
neis	(dois)
neis netat	(três)
neis neis	(quatro)

Números maiores do que estes eram designados pelo vocábulo *ras*, que significava *muitos*.

Vemos aqui um sistema de numeração que utiliza basicamente os vocábulos *netat* e *neis*. Os números subsequentes são formados por combinações desses dois vocábulos. O número três é decomposto na forma $3=2+1$, e recebe o nome *neis netat*. O número quatro é decomposto

na forma $4 = 2+2$, e recebe o nome *neis neis*. Denominamos este tipo de sistema como *sistema aditivo de base dois*.

Aparentemente os indígenas que inventaram esse sistema não precisavam de nomes para números maiores do que quatro. Mas se precisassem poderiam obtê-los seguindo sempre o mesmo método. O número cinco seria decomposto na forma $5 = 2 + 2 + 1$, e receberia o nome *neis neis netat*. O número seis seria decomposto na forma $6 = 2 + 2 + 2$, e receberia o nome *neis neis neis*. Em geral, dado um número natural qualquer a, podemos escrever ou $a = 2 + 2 + \ldots + 2$ ou $a = 2 + 2 + \ldots + 2 + 1$, e a denominação de a nesse sistema seria *neis neis...neis* ou *neis neis...neis netat*. Portanto todo número natural tem uma e uma única representação nesse sistema.

Vemos que esses indígenas inventaram um sistema de numeração perfeitamente coerente. A regra do sucessor pode ser descrita da seguinte forma. Se o nome de um número termina com o vocábulo *neis*, o nome de seu sucessor se obtém repetindo-se todos os vocábulos *neis* e acrescentando-se o vocábulo *netat*. Se o nome de um número termina com o vocábulo *netat*, o nome de seu sucessor se obtém substituindo-se esse vocábulo por *neis*.

Outros indígenas das mesmas ilhas tinham um sistema semelhante:

urapon	(um)
okosa	(dois)
okosa urapon	(três)
okosa okosa	(quatro)
okosa okosa urapon	(cinco)
okosa okosa okosa	(seis)

Vemos que este sistema de numeração utiliza o mesmo método do sistema anterior.

Vejamos agora um sistema um pouco diferente dos dois anteriores. Uma tribo de indígenas australianos, denominada Kamiraloi, contava da seguinte forma, em linguagem falada ([104], página 8):

mal	(um)
bulan	(dois)
guliba	(três)
bulan bulan	(quatro)
bulan guliba	(cinco)
guliba guliba	(seis)

Temos aqui um sistema de numeração com três vocábulos básicos: *mal*, *bulan* e *guliba*. Observe que a regra de numeração não está bem definida. Se continuarmos a contagem, vemos que oito poderá ser *bulan bulan bulan bulan* ou então *bulan guliba guliba*, ferindo a unicidade da representação. No Problema 1.8.7, página 17, o estudante é convidado a completar o estudo deste sistema.

Certos pigmeus africanos contam da seguinte forma:

a	(um)
oa	(dois)
ua	(três)
oa-oa	(quatro)
oa-oa-a	(cinco)
oa-oa-oa	(seis)

e assim por diante. Vemos que se trata de um sistema aditivo de base dois, com exceção do nome do número três, que é específico. Se fossem usados apenas os vocábulos *a* e *oa*, o nome do número três seria *oa-a*.

Os métodos de contagem de tribos indígenas autóctones mostram vestígios de uma época em que o homem possuia capacidade de abstração inferior à atual. Examinando os vocábulos usados para indicar números, vemos que a contagem era feita por comparação com algum conjunto mais conhecido. Assim, em certas tribos da África e do Paraguai, o número cinco era indicado por uma expressão que se pode traduzir por "os dedos de uma mão", e o número dez por "os dedos de ambas as mãos", e o número vinte por "os dedos de ambas as mãos e pés". Em certos dialetos africanos, 20 era indicado por "um homem", ou "um homem completo", e 40 por "um leito", referindo-se à reunião dos dedos das mãos e dos pés de um homem e uma mulher deitados no mesmo leito. Em alguns dialetos malaios e astecas se conta: "uma pedra", "duas pedras", "três pedras", etc, mesmo quando se está enumerando outra coisa. Analogamente, aborígenes do Sul do Pacífico dizem, para contar, "uma fruta", "duas frutas", etc., mesmo quando estão contando pedras, peixes ou outra coisa qualquer.

Em muitos dialetos, os nomes dos números são descritivos, tendo relação com um método de contar, como o uso dos dedos das mãos. No dialeto bugilai, da Nova Guiné, os nomes dos cinco primeiros números são:

1	*tarangésa*	(o dedo mindinho da mão esquerda)
2	*méta kina*	(o dedo seguinte)
3	*guigiméta kina*	(o dedo do meio)
4	*topéa*	(o dedo indicador)
5	*manda*	(o polegar)

Em certas tribos primitivas era muito comum o uso de partes do corpo para indicar números. O etnólogo Lévy-Brühl relata que aborígenes das Ilhas Murray, no estreito de Torres, contavam até 21 usando uma correspondência com partes do corpo humano. Por exemplo, para indicar o número 11 apontavam para seu tórax. Com um procedimento semelhante, os índios papua, da Nova Guiné, contavam até 41.

O uso da base dez para contar, hoje difundido em todo o planeta, tem origem muito antiga. A ampla difusão dessa base se deve principalmente ao fato de termos dez dedos nas mãos, pois as mãos constituem o instrumento mais simples e disponível para contar. O uso dos dedos para contar certamente influenciou também a escolha das bases cinco e vinte, ou composições dessas bases. O autor W. C. Eels, investigando 306 sistemas de numeração de povos indígenas americanos, observou que 146 deles usavam a base dez, 106 usavam as bases cinco ou cinco e dez combinadas, 35 usavam as bases vinte ou cinco e vinte combinadas, 15 usavam a base quatro, 3 a base três e 1 a base oito.

Historiadores afirmam que as bases mais antigas utilizadas pela civilização foram um, dois e três, talvez devido ao fato de que esses números foram os primeiros a serem reconhecidos. Por isso, segundo esses historiadores (por exemplo, [104], página 9), não se pode afirmar que a Arte de Contar começou com o uso dos dedos das mãos. A contagem com os dedos adveio após um certo estágio de desenvolvimento.

1.6 Álgebra dos sistemas de numeração aditivos

Os sistemas de numeração descritos nas duas seções anteriores fazem parte de uma família mais geral, a dos sistemas aditivos. Apresentamos uma descrição algébrica desses sistemas.

Seja β um número natural. Um *sistema aditivo de base* β consiste de :

a) β símbolos ou vocábulos a_1, a_2, ..., a_β para representar os números de um a β, em ordem crescente. Os símbolos ou vocábulos escolhidos chamam-se *algarismos*.

b) regra do sucessor: se a representação de um número termina em a_i, para $i \neq \beta$, a representação do sucessor se obtém substituindo-se a_i por a_{i+1}; se a representação de um número termina em a_β, a representação do sucessor se obtém acrescentando-se a_1 à representação dada.

Portanto, as representações dos números em um sistema aditivo de base β são da forma a_i para $1 \leq i \leq \beta$ e $a_\beta a_\beta \ldots a_\beta a_i$, para $1 \leq i \leq \beta$.

A contagem neste sistema, a partir de um, é:

$$a_1, \;\; a_2, \;\; a_3, ..., \; a_\beta, \;\; a_\beta a_1, \;\; a_\beta a_2, \;\; ..., \; a_\beta a_\beta, \;\; a_\beta a_\beta a_1, \;\; a_\beta a_\beta a_2, ... \tag{1.2}$$

Em um sistema aditivo a ordem de apresentação dos símbolos não precisa ser necessariamente fixada. Por exemplo, em vez de $a_\beta a_\beta a_1$ podemos escrever também $a_1 a_\beta a_\beta$ ou mesmo $a_\beta a_1 a_\beta$ sem prejuízo na indicação dos valores. Entretanto a escolha de uma determinada ordenação dos símbolos facilita a contagem e o reconhecimento dos valores representados. Foi o que fizemos na regra do sucessor definida no item b) acima.

Problema resolvido 1.1. Utilize os seguintes símbolos para um sistema aditivo de base cinco: $\diamondsuit$, $\natural$, ∇, $\varnothing$ e $\heartsuit$, nessa ordem. Qual é a representação do número quarenta e três nesse sistema?

Solução. A decomposição aditiva de 43 em grupos de 5 unidades é: $43 = 5+5+5+5+5+5+5+5+3$. Portanto sua representação no sistema dado é:

$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\nabla$$

Problema resolvido 1.2. Assuma que em um sistema aditivo de base quatro os algarismos são α, β, γ e δ, nessa ordem. **a)** Conte de um a quinze nesse sistema. **b)** Qual é a representação do número vinte e três nesse sistema? **c)** Que número está representado por $\delta\delta\delta\delta\beta$? **d)** Levando em conta que, numa determinada representação, a ordem dos algarismos não importa, que número está representado por $\alpha\beta\gamma\delta$?

Soluções. a) α, β, γ, δ, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\delta$, $\delta\delta\alpha$, $\delta\delta\beta$, $\delta\delta\gamma$, $\delta\delta\delta$, $\delta\delta\delta\alpha$, $\delta\delta\delta\beta$, $\delta\delta\delta\gamma$. b) A decomposição aditiva de 23 em grupos de 4 unidades é: $23 = 4+4+4+4+4+3$. Portanto sua representação no sistema dado é: $\delta\delta\delta\delta\delta\gamma$. c) $\delta\delta\delta\delta\beta = 4+4+4+4+2 = 18$. d) A representação dada não pertence ao sistema. Toda representação desse sistema é constituída por um único algarismo, uma repetição de algarismos δ ou por um algarismo δ ou uma repetição deles ajuntado com um único dos símbolos α, β e γ.

1.7 Sistemas de numeração aditivos históricos

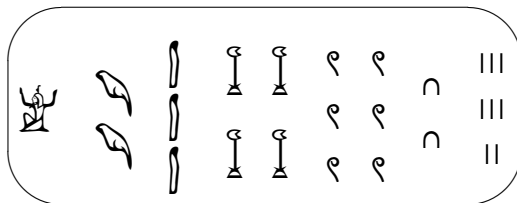
O método aditivo foi utilizado por muitos povos antigos para a representação dos números naturais. Vejamos um pouco dessa história.

O sistema hieroglífico egípcio

O *sistema hieroglífico egípcio* foi desenvolvido no antigo Egito a partir de 3400 a. C., pelo menos. Usado principalmente nos monumentos de pedra, seus símbolos eram considerados

sagrados. A base principal do sistema era 10, e as bases secundárias eram 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 e 10^6. Vemos abaixo os glifos[4] para esses números.

1 10 100 1000 10000 100000 1000000

Para representar um número natural os egípcios o decompunham aditivamente em grupos de unidades, dezenas, centenas, etc., repetindo os símbolos correspondentes até nove vezes. Por exemplo, o número 1 234 628 era decomposto na forma $1 \times 1\,000\,000 + 2 \times 100\,000 + 3 \times 10000 + 4 \times 1000 + 6 \times 100 + 2 \times 10 + 8$, de modo que sua representação era

Como o sistema não era posicional, variava muito a forma com que os símbolos eram dispostos. No exemplo acima começamos com o agrupamento de maior valor, mas os egípcios também usavam colocar à esquerda o agrupamento de menor valor.

Os antigos egípcios tinham outros dois sistemas de numeração, derivados dos sistemas de escrita cursiva usados em papiros, chamados sistemas *hierático* e *demótico*.

Figura 1.1. Detalhe do papiro de Rhind, adquirido em Tebas, Egito, pelo advogado escocês Alexander Henry Rhind aproximadamente em 1850. Está datado de 1650 a. C. Contém problemas de Matemática. Nele o escriba Ahmose (ou Ahmes) diz que o copiou de uma fonte ainda mais antiga.

Sistemas de numeração da Antiga Grécia

No início de sua civilização os gregos utilizaram o sistema de numeração denominado *ático*, ou *herodiânico*. Foi desenvolvido provavelmente no Século VII a. C. Os símbolos para 5, 10, 100, 1000 e 10000 eram formados pelas letras iniciais dos nomes dos números. Os símbolos para 50, 500, 5000 e 50000 consistiam de uma combinação dos primeiros. Vemos abaixo uma possível representação para esses números.

1 5 10 50 100 500 1000 5000 10000 50000

[4] Glifos são pictogramas gravados em pedras.

Para representar um número natural, seu valor era decomposto aditivamente de forma a otimizar o uso dos símbolos acima. Exemplos:

27	=	ΔΔΓII	700	=	𐅅HH
90	=	𐅄ΔΔΔΔ	45000	=	MMMM𐅇

Por volta de 450 a. C. os gregos passaram a usar um sistema numérico alfabético, denominado *jônico*. Eram emprestadas as letras do alfabeto para designar os números de 1 a 9, depois as dezenas e as centenas, conforme a tabela a seguir.

1	Α	10	Ι	100	Ρ
2	Β	20	Κ	200	Σ
3	Γ	30	Λ	300	Τ
4	Δ	40	Μ	400	Υ
5	Ε	50	Ν	500	Φ
6	Ϝ	60	Ξ	600	Χ
7	Ζ	70	Ο	700	Ψ
8	Η	80	Π	800	Ω
9	Θ	90	Ϙ	900	Ͳ

Os caracteres exibidos nesta seção foram desenhados a partir de inscrições de antigos escritos gregos. Estão disponíveis em [42]. Esses símbolos, em geral, pertencem ao alfabeto grego, com exceção de alguns caracteres, que foram emprestados de outros alfabetos orientais.

No sistema jônico alguns números eram representados por mais de um símbolo, por exemplo, 900 também tinha a representação ϡ

A representação dos números naturais nesse sistema seguia o método aditivo. Exemplos:

37 = ΛΖ   853 = ΩΝΓ

Os milhares, a princípio, eram representados por uma combinação do milhar com o símbolo Ͳ Por exemplo, ᴮͲ indicava 2000. Posteriormente se usou ͵A para 1000, ͵B para 2000, ͵Γ para 3000, etc.

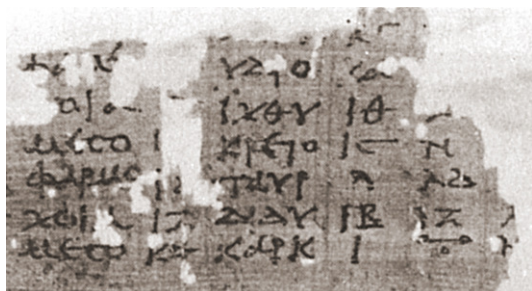



Figura 1.2. Foto de manuscrito grego do Século II cotado do artigo *Greek Numerals* em `https://en.wikipedia.org/wiki/Greek_numerals` Nessa época alguns astrônomos e estudiosos usavam o sistema sexagesimal sumério adaptado com símbolos do alfabeto grego. O zero era representado pela letra o conforme aparece no lado direito inferior do manuscrito. Esse sistema foi usado a partir do Século II a. C. por astrônomos e matemáticos, como Hiparcos de Nicea (c. 140 a. C.), Claudio Ptolomeu (c. 140), Theon de Alexandria (c. 380) e sua filha Hipacia de Alexandria (c. 400), cuja morte marcou o fim da Antiguidade Clássica.

A História da Matemática registra que vários povos adotaram sistemas numéricos denominados *alfabéticos*, assim chamados por usarem letras do alfabeto para representar números. Além dos antigos gregos, podemos citar os sistemas Abjad, o Armênio, o hindu Aryabhata, o Cirílico, o Georgiano, o Hebreu e o Romano.

Figura 1.3. O uso de um sistema numérico alfabético permanece até hoje na tradição judaica. Vemos ao lado uma foto de um relógio de bolso do Século XX com numerais hebreus. Cotado de *Hebrew numerals* em `https://en.wikipedia.org/wiki/Hebrew_numerals`

O sistema de numeração romano

O sistema de numeração romano foi extensamente adotado na antiga Europa devido à sua simplicidade e à expansão do império romano. Ainda é usado em nossos dias para fins decorativos e para certos tipos de enumeração, como capítulos de livros, séculos, sequências de reis e papas, etc. A forma com que o utilizamos hoje **geralmente** segue as regras que descrevemos a seguir (escrevo "geralmente" porque não existe nenhuma obrigatoriedade de regras para o uso atual do sistema romano).

O sistema numérico romano adota agrupamentos aditivos de unidades, dezenas, centenas e milhares. Para evitar a repetição excessiva de símbolos são aplicados numerais intermediários para 5, 50 e 500. Os símbolos para 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1000 são

1	I	5	V	10	X	50	L
100	C	500	D	1000	M		

Também são adotados os seguintes agrupamentos subtrativos, que permitem uma economia na representação:

4	IV	9	IX	40	XL
90	XC	400	CD	900	CM

Na representação de um número os símbolos V, L e D nunca são repetidos, e I, X, C e M não são repetidos mais do que três vezes. A escrita dos números é feita da esquerda para a direita, isto é, o símbolo ou agrupamento de maior valor vem à esquerda do de menor valor. Quando necessário pode ser colocado um traço horizontal sobre um símbolo, um agrupamento ou um conjunto de símbolos, o que tem efeito de multiplicar por mil seu valor.

Observe que **não** são utilizados agrupamentos subtrativos como (IL) para 49, (IC) para 99, etc. Os agrupamentos subtrativos se limitam aos descritos acima.

Exemplos de números representados no sistema romano:

8	VIII	14	XIV	19	XIX
59	LIX	449	CDXLIX	1989	MCMLXXXIX
3562	MMMDLXII	4719	$\overline{\text{IV}}$DCCXIX		

Não deve o estudante pensar que os sistemas numéricos utilizados por civilizações antigas tinham a uniformidade que nossa apresentação possa sugerir. Pelo contrário, esses sistemas passaram por inúmeras modificações, e nem sempre atingiram uma forma única.

Um exemplo típico é o sistema numérico romano, desenvolvido a partir do Século III a. C., e utilizado na Europa até o Século XVI. Nesse período houve muitas variações tanto no desenho dos símbolos quanto na metodologia da representação. Agrupamentos subtrativos nem sempre foram utilizados. Mesmo no Século XVI se encontram números como Mccccccxxxxviiij (1549), em que o i e o j representam a unidade. Muitas vezes a forma IIII foi preferida à forma IV, e VIIII a IX. O número 19 era em geral representado por XIX, mas às vezes também por IXX. Encontram-se também IIX para 8 e IIXX para 18. O traço horizontal sobreposto aos símbolos eram muitas vezes usados para distinguir um número de um vocábulo com a mesma grafia. Mesmo na Idade Média o traço era mais utilizado para diferenciar números de palavras do que para indicar multiplicação por mil.

Observamos também que o uso de agrupamentos subtrativos não foi uma invenção romana. Os sumérios os utilizavam 3000 anos antes de Cristo, assim como os etruscos, que precederam os romanos na Itália.

Figura 1.4. Moeda espanhola de prata do tempo do Rei Carlos IV. Observe no lado esquerdo o uso do numeral IIII em vez de IV. Cotado de *Roman numerals* em `https://en.wikipedia.org/wiki/Roman_numerals`

O sistema minóico

Um sistema de numeração da antiga civilização minóica, desenvolvida na ilha de Creta, constitui um belo exemplo de uso de linguagem pictográfica. No estágio final de seu desenvolvimento, ocorrido entre 1350 e 1200 a. C., os símbolos utilizados eram

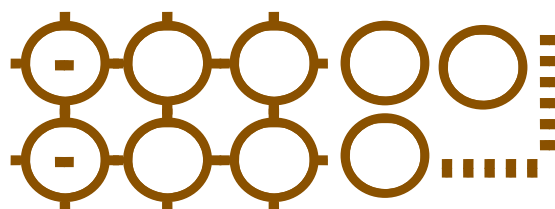
Os números eram decompostos aditivamente conforme o exemplo abaixo:

em que está representado $2 \times 10000 + 4 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 5 = 24365$.

Figura 1.5. Tablete encontrado em Knossos, Creta, com hieroglíficos cretenses datados de 1900-1600 a. C. Exposto no Museu Arqueológico de Heraklion, Grécia.

1.8 Problemas

Problema 1.8.1. "Contar", no âmbito da Aritmética, significa (assinale V ou F dentro dos parêntesis se a afirmação for verdadeira ou falsa, respectivamente):

( ) Construir símbolos ou vocábulos para representar os números em uma linguagem.

( ) Enumerar, ou relacionar sucessivamente os números naturais.

( ) Saber distinguir o que é número de numeral.

( ) Ler uma história para crianças antes delas adormecerem.

( ) Saber a diferença entre número cardinal e número ordinal.

Problema 1.8.2. Qual o significado do verbo contar utilizado na seguinte frase: "Até os cabelos da vossa cabeça estão todos contados. Não temais ..." ([63], 12:7).

Problema 1.8.3. Um jovem pastor de ovelhas traz consigo uma coleção de pedrinhas cujo número é igual ao de ovelhas de seu rebanho. Como ele pode utilizar as pedrinhas para conferir a quantidade de ovelhas ao fim de um dia de pastoreio? Precisa ele saber contar? Você chamaria a esse processo de sistema de numeração?

Problema 1.8.4. Todas as sentenças abaixo são verdadeiras. Em cada caso, diga se estamos falando de número ou de numeral.

a) 3 é 3/4 de 8.

b) 9 é maior do que 5.

c) **v** é a metade de X.

d) 6 é menor do que 4.

Problema 1.8.5. O texto informa que o mais antigo sistema de numeração utilizado pelo homem seria, em símbolos:

Considere as seguintes afirmações sobre esse sistema. Assinale V ou F dentro dos parêntesis se a afirmação for verdadeira ou falsa, respectivamente

( ) Esse sistema é matematicamente incorreto para números grandes.

( ) Nesse sistema qualquer número natural pode ser representado de forma única.

( ) O sistema é bom mas não pode ser utilizado hoje em dia pois não permite fazer divisão.

( ) É possível realizar nesse sistema todas as operações aritméticas, embora seja incômodo.

( ) Esse sistema é correto e simples mas não o utilizamos hoje em dia porque, dentre outros motivos, ele permite um reconhecimento visual imediato apenas para números com valores muito baixos.

( ) Definitivamente não podemos fazer potenciação nesse sistema de numeração pré-histórico.

Problema 1.8.6. Estude as seguintes questões, relativas ao sistema “urapon, okosa” utilizado pelos indígenas das Ilhas Murray, conforme descrito na página 9. **a)** continue a contagem até vinte; **b)** quais são os vocábulos básicos? **c)** qual é a regra do sucessor? **d)** liste as vantagens e desvantagens desse sistema em relação ao nosso sistema de numeração decimal.

Problema 1.8.7. Na contagem dos Kamiraloi, descrita na página 9, faça a seguinte modificação: coloque $4 = 1 + 3 =$ mal guliba. Observe que está agora bem definida uma regra de numeração. Continue a contagem até vinte. Descreva a regra do sucessor.

Problema 1.8.8. Analise o seguinte sistema de numeração, utilizado por uma tribo de indígenas australianos, que vivem nas proximidades do Rio Murray ([104], página 8):

enea	(um)
petcheval	(dois)
petcheval enea	(três)
petcheval petcheval	(quatro)

Problema 1.8.9. Imagine que você esteja vivendo por algum tempo em uma tribo de indígenas primitivos, com o intuito de estudar sua cultura. A certa altura você descobre que eles usam muitos vocábulos para indicar números, alguns deles você consegue traduzir como sendo “um homem”, “dois homens” e “três homens”. Que hipóteses você poderia fazer sobre os valores desses números?

Problema 1.8.10. O Siríaco é uma linguagem derivada do Aramaico, e foi utilizada por pequenos grupos humanos na Europa Oriental nos primeiros séculos da Era Cristã. Em uma forma antiga do alfabeto siríaco era utilizado o símbolo | para indicar a unidade, e o símbolo μ para o número dois. O sistema de numeração era aditivo de base dois:

|, μ, μ|, μμ, μμ|, ...

a) Continue a contagem do sistema siríaco até vinte; **b)** dê a regra do sucessor; **c)** seria viável para nossa civilização utilizar o sistema siríaco?

Problema 1.8.11. Perguntaram à pequena Ana quantas maçãs tinha sua irmã mais velha. Depois de contar, ela disse: — É preciso um dedinho do pé.

Qual era a provável quantidade de maçãs da irmã de Ana?

Problema 1.8.12. Na história do gigante do feijoeiro, Joãozinho o escutou contando seus ovos de ouro: fee, fie, foe, fum, fot, feefot, fiefot, foefot, fumfot, fotfot, feefotfot,...

Continue a contagem. Que sistema de numeração é este? Descreva as limitações desse sistema.

Problema 1.8.13. Considerando o sistema numérico do gigante do feijoeiro, escreva uma regra que permita decidir quando um número é maior do que outro.

Problema 1.8.14. Utilize os seguintes símbolos para um sistema aditivo de base quatro: 1, 2, 3 e 4, nessa ordem. Qual é a representação do número trinta e oito nesse sistema?

Problema 1.8.15. Invente um sistema aditivo de base seis, usando símbolos do tipo $\triangle$, $\oplus$, $\boxminus$, etc. Conte de um a trinta nesse sistema. Descreva a regra do sucessor.

Problema 1.8.16. Argumente a respeito de que todo sistema de numeração aditivo de base β satisfaz às propriedades fundamentais de existência e unicidade.

Problema 1.8.17. Foi observado na Seção 1.4 que o sistema de numeração pré-histórico aditivo de base um, que usa o símbolo |, embora muito simples, não é usado hoje em dia. Dentre outros motivos isso ocorre pelo fato de que não permite o desenvolvimento de algoritmos compactos para se efetuar as operações aritméticas. O texto faz uma observação sobre a adição. Como podem ser efetuadas as outras operações nesse sistema?

Problema 1.8.18. Verifique se o sistema de numeração romano satisfaz às propriedades fundamentais de existência e unicidade.

Problema 1.8.19. Suponha que no sistema hieroglífico egípcio e no sistema minóico cada símbolo não pode ser repetido mais do que nove vezes na representação de um número. Calcule qual é o maior número natural que pode ser representado em cada um desses sistemas.

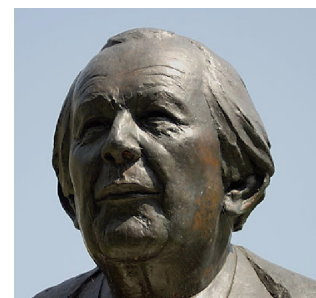
Problema 1.8.20. A princípio desenvolvemos um sistema de numeração para contar objetos em um conjunto. Por exemplo, se em uma cesta tivermos maçãs, podemos contá-las usando algum sistema de numeração. Na ação física de efetuar a contagem, existe uma certa escolha. Escolhemos qual é a primeira maçã, e dizemos "um" (ou outro nome). Escolhemos outra maçã para ser a segunda, e dizemos "dois", e assim por diante. A quantidade de maçãs naquela cesta depende dessas escolhas? A quantidade pode mudar se fizermos escolhas diferentes? Justifique sua resposta.

Problema 1.8.21. Procure explicar o sentido da palavra "infinito" usada no final da página 4.

Problema 1.8.22. Uma criança lhe pergunta o que é "um milhão" (referindo-se ao número). Imagine um diálogo que você possa desenvolver com ela para lhe explicar isso.

1.9 Sobre a gênese psicológica dos números naturais

Observações do comportamento das crianças sugerem que ela constrói pouco a pouco o conceito de número natural.

Jean Piaget, cientista suiço, especialista em psicologia do desenvolvimento. Criou a epistemologia genética, que estuda o conhecimento a partir de sua história e da psicologia.

A epistemologia genética estuda a origem e a natureza do conhecimento construído pelo homem. Jean Piaget e seus colaboradores investigaram extensivamente esses assuntos particularmente através da observação das respostas de crianças de diversas idades ao serem estimuladas por experimentos a elas apresentados. Com relação à construção do número os autores de [90] observam que não é suficiente que a criança saiba relacionar verbalmente nomes de números para que ela esteja na posse do conceito. É necessária uma construção interna realizada por seu aparato lógico-matemático mediante a superação de esquemas sucessivos, cada um dependente de um certo amadurecimento de seu sistema nervoso e estimulada por interações do meio físico e social.

Lê-se em [52], pág. 19 e seguintes, que o aparato psíquico do homem obtém conhecimento através de dois tipos de abstração, a empírica e a reflexiva. A primeira nos permite reconhecer propriedades físicas nos objetos e fenômenos, como cor e peso. A segunda nos leva a criar comparações e observar relações entre objetos, como diferença e semelhança. Essas relações não são propriedades dos objetos, mas um conhecimento lógico-matemático que impomos a eles.

Quanto à aquisição do conceito de número, existem três esquemas principais que a criança precisa superar: a conservação, a síntese da ordem e a inclusão hierárquica.

A conservação, que no contexto dos números é a conservação das quantidades discretas, é a habilidade de perceber que uma quantidade de objetos (vistos como unidades) não muda se o arranjo em que elas se encontram for modificado. A síntese da ordem ocorre quando a criança sente a necessidade lógica de ordenar mentalmente os objetos de um conjunto, criando uma lista em que se tem o primeiro objeto, o segundo, etc, sem repetir e sem que nenhum objeto fique fora da lista. Por outro lado a inclusão hierárquica significa a habilidade de perceber cada número como um todo, de modo que um está incluído em dois, dois em três, e assim por diante. Esses esquemas sugerem que a adição faz parte da construção do número desde o seu início.

A aquisição do conceito de número natural é um processo bastante complexo (e não completamente compreendido) mas se sabe que aos 7/8 anos o raciocínio da criança se torna suficientemente flexível e ela adquire por si mesma o conceito de número natural.

As ideias da epistemologia genética influenciam algumas metodologias para o ensino da Matemática, dentre elas o método denominado construtivista. A principal característica dessas metodologias é promover a aprendizagem autônoma.

O que mais me surpreende é: se cada indivíduo constrói internamente os números naturais, como esse conceito parece ser bastante similar em milhões de indivíduos, talvez em bilhões? A ação do meio ambiente e social é suficiente para explicar esse fenômeno? Talvez tenhamos que considerar que no substrato cósmico age um tipo de *campo numérico*, à semelhança do campo gravitacional ou do campo morfogenético, e que nossa psique é fortemente influenciada por esse campo.

1.10 Sugestões de atividades

Atividade 1.10.1. Observando os usos e costumes de nossa sociedade, descreva situações em que o sistema de numeração aditivo de base um ainda é utilizado. E quanto a agrupamentos de cinco em cinco, ou seis em seis, de |?

Atividade 1.10.2. Pensa-se que a base doze deve ter sido utilizada por povos antigos do continente europeu, devido aos resquícios de contagem que dela temos até hoje. Observando os

usos e costumes de nossa sociedade, descreva as situações em que a base doze ainda é utilizada, ou está em desuso.

Atividade 1.10.3. Estar de posse do conceito de número não significa que possamos contar qualquer coleção de objetos. Dê exemplos de situações em que isso ocorre.

Atividade 1.10.4. Obtenha mais informações sobre a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS), particularmente sobre os sinais utilizados pelos surdos-mudos para representar números.

Atividade 1.10.5. Faça uma relação mais completa do que a do texto sobre representações escritas e faladas de números em diversas línguas.

Atividade 1.10.6. Os analfabetos, às vezes, desenvolvem sistemas próprios de contagem. Entrevistando essas pessoas, descreva métodos de contagem diferentes do nosso sistema usual. Esperamos que o estudante tenha dificuldade em encontrar pessoas analfabetas!

Atividade 1.10.7. O valor máximo atingido pelo sistema de contagem de um povo ou civilização depende de suas necessidades, de seus usos e costumes, e também de seu desenvolvimento científico e tecnológico. Faça uma pesquisa sobre esse tema. Sugerimos os seguintes itens:

a) Pesquise os valores numéricos usados por alguma civilização antiga, como os romanos do tempo de Cristo, por exemplo.

b) Pesquise os valores numéricos médio e máximo usados nas diversas atividades de nossa sociedade: comércio, sistema financeiro, organização social, Física, Matemática, Astronomia, outras ciências.

Atividade 1.10.8. Usando um dicionário da língua portuguêsa estude o significado das seguintes palavras utilizadas neste capítulo: pictográfico, pictograma, ícone, símbolo, linguagem, conceito, abstração, autoconsciência, essência, paulatinamente, etnologia, antropologia, resquício. Descubra o que é escrita cursiva.

Capítulo 2

Sistemas de numeração posicionais

2.1 Introdução

O que é o chamado "sistema decimal"?

O que são os sistemas binário, octal, hexadecimal?

O que são os sistemas posicionais?

A Arte de Contar atinge seu ápice histórico, científico e social com os sistemas de numeração posicionais. O sistema posicional mais importante é o decimal, que pode ser considerado uma das maiores invenções da humanidade. Está hoje difundido em todo o planeta, e é utilizado nos mais diversos setores da organização social, assim como pela maior parte das aplicações científicas. Outro sistema posicional, o binário, assumiu grande importância nos dias de hoje, pois tornou viável a implementação de uma linguagem para uso na computação digital.

2.2 Gênese dos sistemas posicionais

Os conceitos de posição e de agrupamento constituem a base da invenção dos sistemas posicionais. Que civilização e que pessoas teriam concebido essas ideias como recurso para a contagem? Talvez algum cientista que trabalhava em um antigo observatório astronômico, sustentado por um rei visionário, ou algum gênio enfurnado em sua biblioteca, procurando uma maneira mais avançada de representar os números naturais?

Provavelmente tenha sido de uma forma bem mais prosaica. Talvez essas ideias tenham ocorrido em inúmeras situações para as mais diversas pessoas, ao pastor de ovelhas que precisava conferir seu rebanho ao fim de um dia de pastoreio, ao fiscal aduaneiro que precisava conferir os volumes das mercadorias descarregadas no porto, ao financista que precisava contar as moedas, ao encarregado do abastecimento de um exército. O fato é que as ideias de agrupamento e posição são relativamente simples, o mais complicado é transformar esse conhecimento em um sistema posicional completo, socialmente utilizável, com recursos de representação pouco dispendiosos e duráveis, e com o desenvolvimento de algoritmos compactos para implementação das operações aritméticas.

Se você fosse pastor e precisasse conferir a presença de 47 ovelhas no curral poderia simplesmente contá-las: uma, duas, três, etc. Mas, como pastor de ovelhas na antiga Pérsia ou outro

lugar qualquer daqueles tempos, você provavelmente seria analfabeto e não saberia os nomes de tantos números. Nessa situação uma forma de conferir a quantidade de ovelhas seria ter uma bolsa com 47 pedrinhas, e fazer a correspondência uma a uma entre as pedrinhas e as ovelhas. A partir dessa forma não seria difícil inventar outras possibilidades mais econômicas, usando uma quantidade bem menor de pedrinhas, como fazer a correspondência das ovelhas com os dedos de sua mão, e a cada dez ovelhas colocar uma pedra em um determinado lugar. A quantidade de ovelhas estaria correta com quatro pedras e sete dedos contados. Vemos que a unidade antes representada por uma pedrinha adquire uma qualidade adicional, a de representar um grupo de dez unidades. Dessa forma ilustramos o uso do conceito de agrupamento na contagem.

Em [48], página 117, o autor descreve que em Madagáscar, até há pouco tempo, o seguinte método era utilizado para conferir a quantidade de guerreiros. Fazia-se uma pilha de seixos, em número de um a dez, à medida que os guerreiros iam sendo contados. Quando a pilha perfazia dez seixos, estes eram recolhidos, e era colocado um seixo em uma segunda posição. Recomeçava-se a primeira pilha, contando-se de um a dez, quando os seixos eram novamente recolhidos, e colocado um outro seixo na segunda pilha. E assim se prosseguia até a segunda pilha atingir dez seixos, que eram recolhidos, e uma terceira pilha tinha início. Portanto cada seixo da primeira pilha valia uma unidade, cada seixo da segunda pilha valia dez unidades, e cada seixo da terceira pilha, cem unidades. Fica claro que podemos prosseguir com quantas pilhas sejam necessárias, convencionando que um seixo de uma determinada pilha tem um valor dez vezes maior do que se ele estivesse na pilha que a antecede. Dessa forma ilustramos o uso do conceito de posição na contagem.

Vemos assim dois exemplos em que as ideias de posição e de agrupamento são utilizadas como recurso para sintetizar a representação de números. Entretanto isto não significa que seu uso permite uma passagem tranquila para o conceito pleno de sistema de numeração posicional. Basta observar que o ábaco adota os conceitos de agrupamento e de posição, e pode ser usado tanto para sistemas aditivos como para posicionais. Por isso mesmo o ábaco serviu de instrumento de transição entre os dois tipos de sistemas.

A construção de um sistema posicional com uso constante em ambientes sociais e científicos foi realizada no mundo antigo por apenas três povos: os sumérios, os maias e os hindus. Essa construção certamente exigiu a liderança de uma inteligência científica e uma decisão coletiva, ou pelo menos governamental, em adotar o sistema.

O método hindu foi o que trouxe resultados mais convenientes para nossa civilização. Primeiramente devido ao fato do sistema usar a base dez, uma escolha bastante prática e adequada devido ao fato de termos dez dedos nas mãos. Em segundo lugar porque os hindus se preocuparam em criar um sistema adaptado à escrita em papel. Embora não tenhamos registros históricos detalhados do trabalho dos hindus, podemos presumir que inicialmente utilizavam o ábaco para representar números, e criaram algoritmos para implementar as operações aritméticas nesse instrumento. O ábaco era, de fato, o método mais barato e disponível para a prática de qualquer aritmética. Entretanto, o ábaco tem um sério inconveniente, que é o de nada deixar registrado. Daí a necessidade de se criar um método de registro durável, e os hindus tiveram a feliz ideia de transpor sua aritmética do ábaco para a escrita em papel.

A construção de um sistema de numeração posicional decimal para registro em papel exige o reconhecimento de que devem ser usados exatamente dez símbolos, nove para representar os números de um a nove, e mais um símbolo para representar a casa vazia. Exige também a construção de convenções como decidir se a escrita dos valores das casas de um dado número será feita em linha, se esta linha é vertical ou horizontal, e de que lado da representação deve ficar o valor das unidades.

Terminamos esta seção observando que os soldados de um quartel podem ser contados de

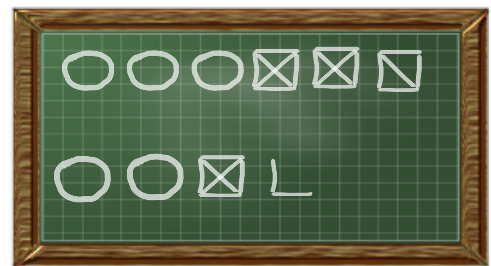
uma forma mais sintética. Como eles são treinados para fazer formações, podem ser organizados grupos como esquadrões com cem componentes cada. É fácil conferir visualmente a quantidade de soldados em um esquadrão. Os restantes podem ser organizados em pelotões com dez em cada. Os que restam desses pelotões ficam separados. Dessa forma podemos contar os esquadrões, os pelotões e os soldados restantes e conferir sua quantidade sem necessidade de contar um a um.

Exemplo 2.1. Um indivíduo faz a contagem dos votos de uma assembléia em uma pequena lousa, marcando cada voto com um traço de giz. A cada quatro votos desenha um quadrado, e os dois votos seguintes são marcados como suas diagonais. Depois de desenhar vários desses quadrados cruzados constatou que a lousa não tinha espaço suficiente, e resolveu representar com um círculo cada grupo de cinco deles. No final da votação a lousa ficou assim:

Figura 2.1. Na lousa estão representados os números

$$30+30+30+6+6+5=107 \text{ (linha de cima)}$$

e

$$30+30+6+2=68 \text{ (linha de baixo)}$$

Vemos que esse singelo método de numeração usa essencialmente três símbolos, o traço, o quadrado cruzado e o círculo. Está nele presente o conceito de agrupamento, já que organiza as unidades em grupos de seis e de trinta. Observe que não utiliza o recurso da posição: os símbolos podem ser trocados de lugar sem prejuízo do valor.

Exemplo 2.2. Retomando o Exemplo anterior, podemos representar algebricamente aquele sistema da seguinte forma. Indicando o círculo com a letra C, o quadrado cruzado com a letra Q e a unidade com U, um número natural qualquer é da forma

$$aC+bQ+cU$$

com as letras a, b e c representando números naturais, sendo que c pode estar ausente ou é ≤ 5, b pode estar ausente ou é ≤ 4 e a pode estar ausente ou é um número natural qualquer. Exemplos:

$$2C+3Q+2U, \quad 4Q+3U, \quad 17C, \quad 7C+3U$$

Estas representações podem ser sintetizadas por

$$(2;3;2)_{lousa}, \quad (0;4;3)_{lousa}, \quad (17;0;0)_{lousa}, \quad (7;0;3)_{lousa}$$

Esse sistema necessita de um método auxiliar para escrever os números a, b e c. Para isso estamos usando o sistema decimal. Vemos assim que esse sistema tem uso muito localizado, servindo apenas para certas situações práticas bastante limitadas. Mas é matematicamente válido, pois todo número tem um sucessor. Por exemplo, o sucessor de $3C+4Q+4U$ é $3C+4Q+5U$, e deste é $4C$. O sucessor de $aC+4Q+5U$ é $(a+1)C=(a+1;0;0)_{lousa}$.

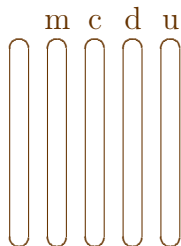
2.3 Problemas

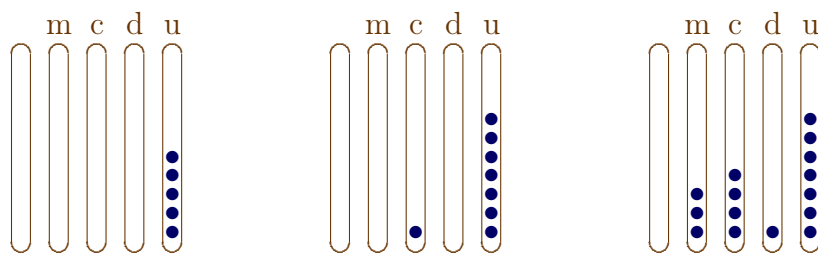
Problema 2.3.1. Suponha que em Madagáscar, conforme descrito no texto, foram contados, um a um, 456 guerreiros. Qual o número mínimo de seixos necessários para se efetuar essa contagem? Quantos esquadrões completos podem ser formados com essa quantidade de guerreiros? Quantos pelotões? O que significa 5 nessa situação?

Problema 2.3.2. Segundo relato de [28], página 22, um indivíduo contava o gado de uma fazenda da seguinte forma. A cada cinquenta bois abaixava um dedo (a pessoa sabia contar de um a cinquenta). A cada cinco dedos guardava uma pedrinha no bolso. **a)** Ao final de uma contagem o indivíduo tinha cinco pedrinhas no bolso, três dedos abaixados e restavam 27 bois extras contados. Quantos bois no total foram contados? **b)** Se a fazenda tem 1860 bois, depois que todos forem contados qual será a situação das pedrinhas, dedos e bois extras?

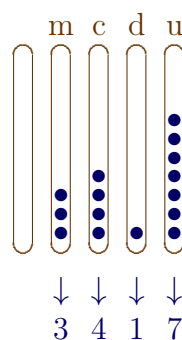
Problema 2.3.3. Descreva algebricamente o sucessor de qualquer número $aC+bQ+cU$ descrito no Exemplo 2.2.

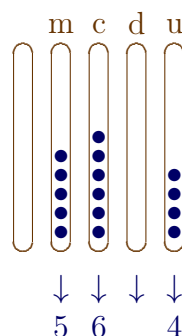
2.4 O sistema posicional decimal

Iniciamos esta seção construindo o sistema posicional decimal para representação em um *ábaco*. Este instrumento pode ser imaginado como uma placa de madeira com sulcos verticais e uma coleção de pedrinhas. Cada um dos sulcos é denominado *casa*. As casas são numeradas da direita para a esquerda. A primeira casa é denominada *casa das unidades (u)*, a segunda, *casa das dezenas (d)*, a terceira, *casa das centenas (c)*, a quarta, *casa das unidades de milhares (m)*. As casas seguintes podem ser denominadas com a ordem de sua posição. Na figura temos o desenho estilizado de um ábaco visto de cima.

Um ábaco com uma pedrinha colocada na casa das unidades representa o número um, com duas pedrinhas, o número dois, e assim por diante, com nove pedrinhas colocadas na casa das unidades representa o número nove. O número dez é representado no ábaco com uma pedrinha na casa das dezenas e nenhuma na casa das unidades. Podemos representar no ábaco qualquer número, desde que tenhamos uma quantidade suficiente de casas e de pedrinhas, usando as seguintes regras: i) cada pedrinha colocada na primeira casa tem valor um; ii) cada pedrinha colocada na segunda casa ou nas seguintes tem valor dez vezes maior do que se estivesse colocada na casa imediatamente anterior; iii) numa casa qualquer a quantidade máxima de pedrinhas é nove, sendo que a casa pode estar vazia.

Na figura a seguir vemos três ábacos, cada um representando um número, o primeiro constituído por cinco unidades, o segundo por uma centena, nenhuma dezena e sete unidades, e o terceiro por três mil mais quatro centenas mais uma dezena e mais sete unidades.

Nosso próximo passo é construir uma forma de representar números no sistema posicional decimal de modo que eles possam ser escritos em uma folha de papel. A primeira providência que se faz necessária é desenhar símbolos para cada um dos números de um a nove. Já sabemos que esses símbolos são:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tomamos como ponto de partida o dispositivo já construído para representar os números no ábaco. Os símbolos acima descrevem quantas pedrinhas existem em uma determinada casa. Imaginamos assim a seguinte transposição:

Portanto esse número é escrito em uma folha de papel simplesmente no formato 3417.

Ao transpor a representação dos números do ábaco para o papel percebemos logo que temos um problema. O que fazer quando uma ou mais casas do ábaco estão vazias? Uma solução é nada escrever na casa ou casas correspondentes. Por exemplo,

e vemos que o número assim representado no ábaco, quando transposto para o papel, se escreve 56 4. Com essa notação podemos perceber que a primeira casa está ocupada por 4, representando quatro unidades, a segunda casa está vazia, 6 está na terceira casa representando seis centenas, e 5 está na quarta casa representando 5 milhares.

Mas a experiência logo nos indica que esta não é uma boa solução. Por exemplo, em 89   34 temos representados dois números diferentes, a saber, 89 e 34, ou será que se trata de um único número com duas casas vazias intermediárias, ou seriam três? Se observarmos que 34   pode ser simplesmente o número 34 ou 34 seguido de algumas casas vazias, então a confusão fica maior ainda. Uma solução para isso seria desenhar casas para os símbolos. As

casas podem ser representadas por quadradinhos. Vemos abaixo um número com duas casas vazias intermediárias e uma casa vazia correspondente às unidades.

7	9	5			3	9	

Já sabemos que a solução apresentada pelos hindus (e também pelos maias, sumérios e outros povos) foi muito melhor. Eles inventaram um símbolo exclusivo para indicar a casa vazia. Esse símbolo, que hoje denominamos *zero*, é indicado em nossos dias por 0. Usando essa ideia o número acima é representado por 79500390.

Temos agora todos os ingredientes necessários para definir o *sistema posicional decimal* usando uma simbologia algébrica adequada para representar os números na forma escrita. Segue a definição.

Consideramos os símbolos

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

que são chamados *algarismos decimais*. O símbolo 0 chama-se zero e os símbolos 1, 2, 3,..., 9 designam os números de um a nove, nessa ordem. Esses símbolos também são denominados *algarismos hindu-arábicos* devido à sua origem histórica.

Cada número natural é indicado por uma sequência de algarismos escritos em linha horizontal um em seguida do outro, tendo como *regra do sucessor*:

i) se a representação de um número tem como unidade um dos algarismos 0, 1, ..., 8, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos;
ii) se a representação de um número tem como unidade o algarismo 9, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo 9 por 0 e em seguida aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra à casa seguinte. Se a casa seguinte for vazia considera-se como se ela tivesse o valor zero.

A forma geral de uma representação no sistema decimal é

$$d_n \dots d_2 d_1 d_0 \tag{2.1}$$

em que cada d_i é um algarismo decimal, sendo $d_n \neq 0$, e $n = 0, 1, 2, \dots$ Portanto os números naturais representados no sistema decimal são

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., 19, 20, 21, ..., 98, 99, 100, 101, ...$$

Estivemos definindo o sistema decimal através da regra do sucessor. Sabendo representar o número 1 e sabendo representar o sucessor de qualquer número cuja representação esteja dada, podemos representar todos os números naturais no sistema decimal. Com esse método representamos todos os números naturais contando-os um a um. Essa é a forma de contagem no sistema decimal que deriva diretamente construção psicológica dos números naturais.

Existe uma outra forma de obter a representação decimal de um número natural. Consiste em agrupar as unidades de um dado número em grupos de dez. Vejamos a que isso nos conduz.

Seja m um número natural. Agrupamos as unidades de m na maior quantidade possível de grupos de dez. Pode ocorrer nada sobrar ou pode restar uma quantidade de unidades de 1 a 9. Seja q_1 a quantidade de grupos de dez assim formados e seja d_0 o que restou. Escrevemos $m = q_1 10 + d_0$. Tomamos q_1 e o agrupamos novamente na maior quantidade possível de grupos de dez. De novo pode ocorrer nada sobrar ou pode restar uma quantidade de unidades de 1

a 9. Seja q_2 a quantidade de grupos de dez assim formados e seja d_1 o que restou. Podemos escrever $q_1 = q_2 10 + d_1$. Note que $m > q_1 > q_2$. Prosseguindo em algum passo encontramos um quociente q_n com valor entre 1 e 9, e aí paramos os agrupamentos.

Podemos resumir esse procedimento com as seguintes relações algébricas:

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0 \\ q_1 &= q_2 10 + d_1 \\ q_2 &= q_3 10 + d_2 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_n 10 + d_{n-1} \end{aligned}$$

Recompondo as relações acima e escrevendo $q_n = d_n$ vem

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0 \\ &= (q_2 10 + d_1)10 + d_0 \\ &= q_2 10^2 + d_1 10 + d_0 \\ &\vdots \\ &= d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0 \end{aligned}$$

Portanto temos duas formas de representação de m:

$$d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0 \quad \text{e} \quad d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0$$

A forma $d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0$ chama-se *forma compacta da representação decimal de* m, ou simplesmente *representação decimal de* m. A forma $d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0$ chama-se *forma expandida da representação decimal de* m. Para dirimir possíveis confusões a representação compacta pode vir escrita como $(d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0)_{dez}$.

O sistema posicional decimal também pode ser chamado de *sistema de base dez*. Dizemos ainda que dez (ou 10) é a *base* desse sistema.

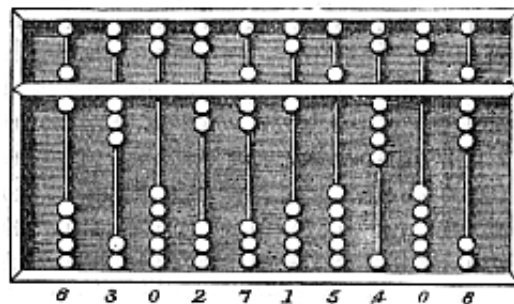
Dada uma representação $d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0$, os valores d_i chamam-se *dígitos decimais* do número, ou, simplesmente, *dígitos*, quando o contexto deixa claro que se trata de base dez.

A leitura de um número natural representado no sistema decimal pode ser feita nomeando-se seus dígitos um a um, da esquerda para a direita. Por exemplo, 408 739 se lê: quatro zero oito sete três nove.

A leitura de um número na língua portuguesa é explicada na seção 2.10 na página 41.

Uma última observação. Obtivemos a representação decimal de um número natural qualquer de duas formas, pela regra do sucessor e por agrupamento. Resta saber se esses dois métodos sempre fornecem os mesmos dígitos para o mesmo número. Para ver que isso é verdade observe que a regra do sucessor também agrupa as unidades do número. Ao contar os números a partir de 1 usando a regra do sucessor, sempre que se atinge dez unidades numa determinada casa, a casa posterior aumenta de uma unidade, contando assim mais um agrupamento. E vice-versa, se uma casa é aumentada de uma unidade significa que se obteve mais um agrupamento correspondente àquela casa. Assim os dois métodos são equivalentes. Na verdade, qualquer que seja o método de obtenção dos dígitos, eles serão sempre os mesmos. Uma demonstração formal desse fato está feita no Capítulo 6, na página 157.

Figura 2.2. Desenho de um tipo comum de ábaco com separação. Uma conta na região superior de uma casa vale 5 vezes uma conta da região inferior. Está sendo representado o número

$$6\,302\,715\,408$$

Problema resolvido 2.3. Em um número com dois dígitos o valor das dezenas é o triplo do das unidades. Trocando-se os dois dígitos entre si se obtém um número que somado com o primeiro resulta 132. Qual é o primeiro número?

Solução 1. Por exame de todos os casos. Como o dígito das dezenas é o triplo do das unidades, este só pode ser 1, 2 ou 3. De fato, o dígito das unidades não pode ser ≥ 4, pois nesse caso o dígito das dezenas seria ≥ 12 o que não é possível. Portanto o número só pode ser: 31 ou 62 ou 93.

Agora examinamos as somas:

$$31 + 13 = 44 \qquad 62 + 26 = 88 \qquad 93 + 39 = 132$$

Portanto o número é 93.

Solução 2. Usando notação algébrica. Seja $(ab)_{dez}$ o número dado. As condições apresentadas nos dizem que $a = 3b$ e que $(ab)_{dez} + (ba)_{dez} = 132$.

Como $(ab)_{dez} = 10a+b$ e $(ba)_{dez} = 10b+a$ temos $10a+b+10b+a = 132 \Rightarrow 11a+11b = 132 \Rightarrow 11(a+b) = 132 \Rightarrow a+b = 12$. Substituindo a por $3b$ vem $4b = 12$ ou $b = 3$. Assim $a = 3b = 9$ e o número é 93. □

Examinando as somas $32+23 = 44$, $62+26 = 88$ e $93+39 = 132$ feitas acima, percebemos que têm algo em comum: são múltiplos de 11 (um múltiplo de 11 é um produto da forma $11m$, sendo m um número natural). Isso nos sugere o seguinte resultado:

Problema resolvido 2.4. O *reverso* do número natural $d_n \dots d_1 d_0$ é o número $d_0 d_1 \dots d_n$ (pode-se assumir que $d_0 \neq 0$). Mostre que a soma de um número de dois dígitos com seu reverso é sempre um múltiplo de 11.

Solução. Seja $(ab)_{dez}$ um número com dois dígitos. Seu reverso é $(ba)_{dez}$. Lembrando que $(ab)_{dez} = 10a + b$ e que $(ba)_{dez} = 10b + a$, sua soma pode ser escrita como

$$(ab)_{dez} + (ba)_{dez} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a+b)$$

Portanto a soma de um número de dois dígitos com seu reverso é sempre um múltiplo de 11. □

Observamos que este problema também pode ser resolvido por exame de todos os casos. Basta considerar todos os números de 10 a 99 e fazer a conta com cada um deles ...

2.5 Problemas

Problema 2.5.1. Um ábaco decimal usa pedrinhas para representar a unidade. Qual o número mínimo de pedrinhas necessárias para representar no ábaco os números de 1 a 1200, um a um?

Problema 2.5.2. Descreva algebricamente o sistema de numeração utilizado pelo indivíduo que contava bois no Problema 2.3.2 da página 24. Em outros termos, se $(abc)_{boi}$ é a representação de um número nesse sistema, descreva a representação expandida. Nesta fórmula o que são a, b e c, e que valores podem assumir? Qual é o sucessor de $(a4(49))_{boi}$? Descreva a regra geral do sucessor. Este é um sistema de numeração matematicamente significativo?

Problema 2.5.3. Uma criança, ao contar as bolas de uma cesta, se enganou, e começou com vinte. Prosseguiu com vinte e um, vinte e dois, contando corretamente daí por diante, a última bola foi contada como trinta e nove. Quantas bolas existem na cesta?

Problema 2.5.4. Começando de 1 e enumerando os números um a um até contar 1579, quantos foram contados? Por quê? Começando de 29 e enumerando os números um a um até contar 1579, quantos foram contados? Por quê?

Problema 2.5.5. Quantos são os números naturais de 1 a 1000 para os quais a soma dos dígitos é 5?

Problema 2.5.6. Descubra todos os números com as seguintes propriedades: ele tem dois dígitos, o dígito das dezenas é o dobro do das unidades, e trocando os dois dígitos entre si se obtém um número que subtraído do primeiro resulta 36. Resolva esse problema usando dois tipos de solução: por exame de todos os casos e por notação algébrica. Qual forma é mais fácil?

Problema 2.5.7. Se a e b são algarismos decimais tais que $a+b=7$, então $(aba)_{dez}$ é múltiplo de 7.

Problema 2.5.8. Um estudante, para saber se 203 é múltiplo de 7, fez a seguinte conta: $20 - 2 \times 3 = 14$. Como 14 é múltiplo de 7, então 203 também é, concluiu ele. Generalize e obtenha uma justificativa algébrica. O método vale para qualquer número? Explique tudo.

Problema 2.5.9. Qual é o dígito da casa das unidades do número $n = 10q + a$ em que q é um número natural qualquer e a é um algarismo? E quais são os dígitos das casas das unidades e das dezenas do número $m = 100q + a$?

Problema 2.5.10. Justifique por que o quadrado de um número de dois dígitos terminado em 5 pode ser obtido da seguinte maneira: multiplique o dígito das dezenas do número dado pelo seu sucessor e escreva 25 à direita do resultado. Novamente resolva esse problema usando dois tipos de solução: por exame de todos os casos e por notação algébrica. Qual forma é mais fácil?

Problema 2.5.11. Justifique por que o quadrado de um número de três dígitos terminado em 5 pode ser obtido da seguinte maneira: multiplique o número formado pelos dígitos das centenas e das dezenas, nessa ordem, pelo seu sucessor e escreva 25 à direita do resultado. Qual é a forma é mais fácil de resolver esse problema: por exame de todos os casos ou por notação algébrica?

Problema 2.5.12. Investigue se é possível obter uma regra prática para o cálculo do quadrado de um número qualquer cujo dígito das unidades seja 5. Não se esqueça de justificar.

Problema 2.5.13. Considere um número $m = d_n \dots d_2 d_1 d_0$ representado na forma geral (2.1). Diga o que representam, em relação às unidades de m, cada um dos valores: **a)** d_0; **b)** d_1; **c)** d_2; **d)** $d_n \dots d_2 d_1$. **e)** Indique a quantidade de centenas que podemos formar com as unidades de m.

Problema 2.5.14. Em uma escola as salas de aula estão identificadas por números de dois dígitos. Um estudante observa nos números consecutivos de quatro salas que a soma dos algarismos das dezenas coincide com a soma dos algarismos das unidades. Quais são os números?

Problema 2.5.15. Em uma estrada um marco de quilometragem traz um número com dois algarismos. A uma certa distância d adiante um marco traz um número com os mesmos algarismos do marco anterior mas em casas trocadas. Mais adiante, num terceiro marco, situado à distância d do segundo, novamente aparecem os mesmos algarismos, na mesma ordem que no primeiro marco, mas com um zero na casa do meio. Ache os números e a distância d.

Problema 2.5.16. Olhe bem para esse símbolo: **125**

Procure distinguir qual foi a ideia que primeiro lhe veio à mente ao ver o símbolo 125. Depois de descrever isso, procure perceber outras ideias associadas ao símbolo 125.

Problema 2.5.17. Quantos são os números naturais de três dígitos em cuja representação não comparecem os algarismos 2, 5, 7 ou 8?

Problema 2.5.18. Reveja o Problema Resolvido 2.4 e mostre agora que a soma de um número de quatro dígitos com seu reverso é sempre um múltiplo de 11. Isso acontece também para números com três dígitos?

Problema 2.5.19. Um número natural chama-se *palíndromo* ou *capicua* quando sua representação decimal for igual à sua representação reversa. Demonstre que todo número capicua com dois dígitos é múltiplo de 11. E quanto a números com três ou quatro dígitos?

Problema 2.5.20. Um número natural diz-se *automórfico* quando reaparece no final da representação decimal de seu quadrado. Os números automórficos de um dígito são 1, 5 e 6, e também o algarismo zero, se o considerarmos um número. Um número automórfico de dois dígitos é 25, pois $25^2 = 625$. Determine todos os números automórficos de dois dígitos.

2.6 Sistemas posicionais em uma base qualquer

Todo número natural $\beta \neq 1$ pode servir de base para a construção de um sistema posicional, o que pode ser feito de forma análoga à do sistema decimal. O método de representação assim obtido é denominado *sistema posicional de base* β, ou simplesmente *sistema de base* β, quando estiver claro no contexto que se trata de um sistema posicional. Dizemos ainda que β é a *base* desse sistema.

Dado um número natural $\beta \neq 1$, escolhemos β símbolos, um para indicar a casa vazia e $\beta - 1$ para indicar os números de 1 a $\beta - 1$. Esses símbolos são chamados β-*algarismos*.

A representação dos números naturais no sistema posicional de base β segue as mesmas convenções do sistema decimal, adaptando-se a regra do sucessor conforme segue:

i) se a representação de um número tem como unidade um dos algarismos que representam 0, 1, ..., $\beta - 2$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos. $\beta - 2$ é o antecessor de $\beta - 1$.
ii) se a representação de um número tem como unidade o algarismo que representa $\beta - 1$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo por zero e em seguida aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra à casa seguinte. Se a casa seguinte for vazia considera-se como se ela tivesse o valor zero.

Dado um número natural m, podemos obter sua representação na base β através da regra do sucessor ou agrupando as unidades de m em grupos de β. Assim, de modo inteiramente análogo ao que fizemos para o sistema decimal, vemos que m tem duas formas de representação, a compacta e a expandida:

$$m = d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0 = d_n \beta^n + d_{n-1} \beta^{n-1} + \cdots + d_1 \beta + d_0 \tag{2.2}$$

em que cada d_i é um β-algarismo e $d_n \geq 1$.

Quando é necessário esclarecer em que base o número está sendo representado usamos a notação $(d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0)_\beta$. Dada uma representação $d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0$ em um sistema de base β, os valores d_i chamam-se β-*dígitos* do número, ou simplesmente *dígitos* se no contexto estiver claro de que base se trata. Se $\beta = 2$ os valores d_i chamam-se também *dígitos binários*. Na lingua inglesa se escreve *binary digit*, do que procede a abreviatura *bit*, muito usada na Ciência da Computação.

Consideremos um exemplo tomando quatro como base. Para construir o sistema de numeração posicional de base quatro precisamos primeiro escolher quatro símbolos, três para os números de um a três e um para designar a casa vazia. Por facilidade escolhemos os símbolos conhecidos

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

com os mesmos nomes pelos quais são denominados normalmente: zero, um, dois, três. Esses serão os algarismos de nosso sistema de base quatro.

Começamos contando: 0, 1, 2, 3. E quem é o sucessor de 3 na base quatro? Observe que já contamos todos os números com um dígito. O sucessor é o menor número com dois dígitos. Usando a regra do sucessor na base quatro vemos que o dígito 3 deve ser substituído por 0 e a casa anterior deve ser ocupada por 1. Portanto o sucessor é 10 (lê-se *um zero*). E assim por diante, a contagem na base quatro é:

	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
100	101	102	103	110	111	112	113	120	121	122	123	130	131	132	133
200	201	202	203	210	211	212	213	220	221	222	223	230	231	232	233
300	301	302	303	310	311	312	313	320	321	322	323	330	331	332	333

e o número seguinte é 1000 (lê-se *um zero zero zero*).

A representação de números na base quatro (ou em outra base qualquer) precisa de uma notação de modo que não haja confusão com a base dez sempre que usarmos para algarismos os mesmos símbolos. Assim, conforme já observamos, o número 1000 da base quatro, por exemplo, pode ser representado por $(1000)_{quatro}$ se o contexto der margem a alguma dúvida. Podemos também usar $(1000)_4$ mas isso não é tão bom, pois o símbolo 4 não existe na base quatro. Lembremo-nos também de chamar $(1000)_{quatro}$ de *um zero zero zero* e não de *mil*, pois $(1000)_{quatro}$ não é mil.

As bases posicionais mais utilizadas nas aplicações científicas são as de dois até dezesseis. A base sessenta é de interesse histórico, pois foi adotada pelos sumérios, assim como a base vinte, escolhida pelos maias.

Na verdade os sistemas posicionais mais usados são: binário (dois), ternário (três), quaternário (quatro), quinário (cinco), octenário ou octal (oito), nonário (nove), decimal (dez), undecimal (onze), duodecimal (doze) e hexadecimal (dezesseis). O binário é o sistema natural das máquinas digitais, mas são usados também pela Ciência da Computação os sistemas quaternário, o octal e o hexadecimal.

Costuma-se escolher como algarismos para as bases de dois a dez os símbolos correspondentes utilizados no sistema decimal. Para as bases maiores costuma-se considerar a partir de 9 a sequência de letras do alfabeto na forma capital: A, B, C, etc.

Por exemplo, para o sistema duodecimal os algarismos são

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad A \quad B$$

Vejamos como fica a contagem no sistema duodecimal:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B

e assim por diante, o maior número com duas casas é $(BB)_{doze}$, e seu sucessor é $(100)_{doze}$.

Para o sistema sexagesimal (base sessenta), de interesse histórico, teríamos que construir sessenta símbolos diferentes, aqui nem a letras de nosso alfabeto seriam suficientes. Uma forma é adotar os nossos próprios números de zero a cinquenta e nove, e, na representação dos números separar as casas com vírgula para evitar confusão. Assim o número sexagesimal

$$(21, 35, 47, 58)_{sessenta}$$

tem quatro casas com valores, sendo 58 unidades, 47 grupos de sessenta, 35 grupos de sessenta vezes sessenta e 21 grupos de sessenta vezes sessenta vezes sessenta. No nosso sistema decimal esse número é

$$(21, 35, 47, 58)_{sessenta} = 21 \times 60^3 + 35 \times 60^2 + 47 \times 60 + 58 = 4\,664\,878$$

Outra forma de construir algarismos sexagesimais seria unir graficamente cada dois símbolos decimais para formar um único símbolo. Por exemplo, o número dado acima seria representado por

21354758

em que fica claro quais são os dígitos de cada casa. Uma terceira forma, sugerida em [40], página 74, consiste em convencionar que os algarismos sexagesimais serão indicados sempre por dois dígitos decimais, acrescentando o algarismo zero à esquerda se for necessário. Dessa forma podemos omitir qualquer outra notação, pois fica claro quais são as casas. Por exemplo, $(19, 6, 35, 8)_{sessenta}$ pode ser representado por $(19063508)_{sessenta}$.

É fácil transpor um número de uma base para outra, conforme veremos.

Para transpor um número de outra base para a base dez basta expandir a representação e implementar os cálculos na base dez. Exemplos:

$$(11011)_{dois} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 27$$

$$(3605)_{sete} = 3 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 0 \times 7 + 5 = 1328$$

$$(A0B)_{doze} = A \times 12^2 + 0 \times 12 + B = 10 \times 12^2 + 0 \times 12 + 11 = 1451$$

Para transpor da base dez para outra base $\beta \neq 10$ podemos utilizar a técnica do agrupamento. Dado um número na base dez, agrupamos suas unidades em grupos de β. O valor que sobra é um β-algarismo, e ele é o dígito das unidades do número na base β. E assim por diante.

Como exemplo transpomos 127 para a base três. Quantos grupos de três podemos fazer com 127 elementos? Calculamos

$$127 = 3 \times 42 + 1$$

Com isso já sabemos que o dígito das unidades da representação de 127 na base três é 1. Assim $127 = (???1)_{três}$. Para calcular o dígito seguinte vemos quantos grupos de três podemos fazer com 42. Temos $42 = 3 \times 14 + 0$, e assim $127 = (??01)_{três}$. Agora $14 = 3 \times 4 + 2$, de modo que $127 = (??201)_{três}$. Como $4 = 3 \times 1 + 1$, temos $127 = (?1201)_{três}$. O último quociente é 1, que é menor do que três, portanto ele é o último dígito. Dessa forma

$$127 = (11201)_{três}$$

Podemos conferir:

$$(11201)_{três} = 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1 = 127$$

Para transpor de uma base não decimal para outra não decimal podemos usar a base dez como passagem intermediária. Vejamos um exemplo. Vamos transpor $(6035)_{sete}$ para a base cinco. Primeiro transpomos $(6035)_{sete}$ para a base dez. Temos

$$(6035)_{sete} = 6 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 2084$$

Agora transpomos 2084 para a base cinco. Temos

$$\begin{aligned} 2084 &= 416 \times 5 + 4 \\ 416 &= 83 \times 5 + 1 \\ 83 &= 16 \times 5 + 3 \\ 16 &= 3 \times 5 + 1 \\ 3 &= 0 \times 5 + 3 \end{aligned}$$

Portanto $2084 = (31314)_{cinco}$. Em resumo,

$$(6035)_{sete} = 2084 = (31314)_{cinco}$$

Existe uma forma de transpor de uma base não decimal para outra não decimal sem usar a base dez como intermediária. Explicaremos com fazer isso na Subseção 3.6.2, na página 78.

Já observamos que o binário é o sistema natural das máquinas digitais, mas são usados também pela Ciência da Computação os sistemas quaternário, o octal e o hexadecimal, pois esses sistemas guardam uma correspondência natural entre si, de modo que é fácil transpor um número de um para o outro. A conversão entre essas representações pode ser feita através de tabelas, facilitando a construção de algoritmos rápidos para a transposição de uma base para outra. Vejamos a tabela de transposição entre as bases binária e octal. O estudante pode conferir os valores.

Número binário	**Algarismo octal**
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Para converter uma representação octal para binária basta usar diretamente a tabela, substituindo cada dígito octal pelos três dígitos binários correspondentes. Exemplo:

$$(57023)_{oito} = (101\,111\,000\,010\,011)_{dois}$$

Se a última casa (contando da direita para a esquerda) da representação binária for ocupada por 0, eliminamos essa casa, o mesmo para a penúltima.

Para converter uma representação binária para octal separamos os dígitos do número binário dado em grupos de três, contando da direita para a esquerda, e se necessário acrescentamos à esquerda um ou dois algarismos 0 para que todos os grupos fiquem completos. Em seguida fazemos a conversão usando a tabela. Exemplo:

$$(1\,110\,100\,100\,101\,011\,110\,100)_{dois} =$$

$$= (001\,110\,100\,100\,101\,011\,110\,100)_{dois} = (16445364)_{oito}$$

No Problema 2.7.11 o estudante é convidado a explicar algebricamente por que funciona essa tabela.

Figura 2.3. Digitalização de parte de manuscrito de Gottfried W. Leibniz com anotações sobre o sistema binário. Esse matemático fez estudos sobre esse sistema, de certo modo antecipando seu uso na moderna Ciência da Computação.

Podemos construir sistemas numéricos das mais variadas formas. Um exemplo significativo é a *expansão de Cantor*, ou *representação fatorial*. Um número natural n qualquer é dado por

$$n = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + \ldots + a_2 2! + a_1 = (a_m; a_{m-1}; \ldots; a_2; a_1)_!$$

em que cada a_i é um número natural $a_i = 0$, 1, 2, ..., i. A notação $m!$ chama-se *fatorial* de m e significa o produto dos números de 1 a m, isto é, $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \cdot m$.

Para encontrar a representação fatorial de 500 observamos que 500 está entre 5! e 6! Dividindo 500 por 5! temos $500 = 4 \times 5! + 20$. Por sua vez 20 está entre 3! e 4!, e temos $20 = 3 \times 3! + 2$. Como $2 = 2!$ temos

$$500 = 4 \times 5! + 3 \times 3! + 1 \times 2! =$$

$$= 4 \times 5! + 0 \times 4! + 3 \times 3! + 1 \times 2! + 0 = (4; 0; 3; 1; 0)_!$$

Observe que a representação fatorial usa a sequência infinita 1!, 2!, 3!, ..., que tem um papel similar à da sequência 1, 10, 10^2, ... no sistema decimal. Na representação fatorial todos os número naturais são algarismos, por isso necessitamos representá-los em um sistema auxiliar. Aqui usamos o decimal, mas poderia ser outro, como o sistema hexadecimal. Uma característica da expansão de Cantor é que ela permite uma representação mais compacta dos números, economizando memória nos computadores digitais.

Problema resolvido 2.5. Justifique por que se a é um número natural cuja representação decimal tem n dígitos, então $10^{n-1} \leq a < 10^n$. O que ocorre em sistemas de base β qualquer?

Solução. Se a tem um dígito, então $1 \leq a < 10$, ou seja, $10^{1-1} \leq a < 10^1$. Se a tem dois dígitos, então $10 \leq a < 100$, ou seja, $10^{2-1} \leq a < 10^2$. Em geral, o menor número com n dígitos é $100\ldots0$ com $n-1$ zeros, o que é o mesmo que 10^{n-1}. Assim se a tem n dígitos então $10^{n-1} \leq a$. Por outro lado, como 10^n tem $n+1$ dígitos, segue que $a < 10^n$.

De forma análoga vemos que se a é um número natural cuja representação no sistema de base β tem n dígitos, então $\beta^{n-1} \leq a < \beta^n$.

Vejamos outra forma de obter essa relação. Seja

$$m = d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_1\beta + d_0$$

um número com n dígitos na base β. Lembremos que $0 \leq d_i \leq \beta - 1$ para todo i e que $1 \leq d_{n-1}$. Assim

$$m = d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_1\beta + d_0 \geq d_{n-1}\beta^{n-1} \geq \beta^{n-1}$$

Por outro lado,

$$m = d_{n-1}\beta^{n-1} + d_{n-2}\beta^{n-2} + \cdots + d_1\beta + d_0 \leq$$
$$\leq (\beta-1)\beta^{n-1} + (\beta-1)\beta^{n-2} + \cdots + (\beta-1)\beta + (\beta-1) =$$
$$= (\beta-1)\left[\beta^{n-1} + \beta^{n-2} + \cdots + \beta + 1\right] = (\beta-1)\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} = \beta^n - 1 < \beta^n$$

Você notou que usamos a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica. □

Problema resolvido 2.6. Quantos dígitos decimais e binários tem o primo de Mersenne $M = 2^{11213} - 1$, descoberto por Donald B. Gillies em 1963?

Solução. Neste problema supomos que o estudante já estudou logaritmos. Calculemos primeiro a quantidade n de dígitos decimais de 2^{11213}. Do problema anterior temos

$$10^{n-1} \leq 2^{11213} < 10^n \Rightarrow \log 10^{n-1} \leq \log 2^{11213} < \log 10^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 \leq 11213 \log 2 < n \Rightarrow n - 1 \leq 3375,449\ldots < n \Rightarrow n = 3376$$

Note que não podemos ter $2^{11213} = 10^{n-1}$, pois isso implicaria $n - 1 = 11213 \log 2$, mas $11213 \log 2 \approx 3375,449$ não é um número natural. Portanto 2^{11213} não é o menor número natural com n dígitos decimais, e assim, $M = 2^{11213} - 1$ também tem n dígitos, ou seja, 3376 dígitos decimais.

Vejamos agora a quantidade de dígitos binários. O número $2^{11213} = (100\ldots0)_{dois}$ tem 11213 zeros, portanto tem 11214 dígitos. Como esse é o menor número com 11214 dígitos binários, o número $M = 2^{11213} - 1$ tem 11213 dígitos binários. □

2.7 Problemas

Problema 2.7.1. Explique por que não pode haver sistema de numeração posicional de base um.

Problema 2.7.2. Um jovem afirmou que completou 100000 anos na data 100/1000/10000. Será ele de alguma civilização extra-terreste em que um mês tem mais do que 100 dias e o ano tem mais do que 1000 meses?

Problema 2.7.3. Temos aqui uma fileira de moedas. Conte-as na base quatro.

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

Qual é a quantidade de moedas?

Problema 2.7.4. Você sabe contar em outras bases que não a base dez? Encontre o sucessor de cada um dos números abaixo usando a regra do sucessor da base indicada:

$$(78)_{nove} \quad (65)_{sete} \quad (16)_{sete} \quad (1011)_{dois} \quad (53AF)_{dezesseis}$$

Problema 2.7.5. Escreva os números de 1 a $(200)_{cinco}$ no sistema quinário. Faça o mesmo no sistema duodecimal de 1 a $(100)_{doze}$.

Problema 2.7.6. Um feirante, em certo dia, vendeu onze grosas e dez dúzias de ovos. Escreva esse número na base doze.

Problema 2.7.7. Quantas vezes cada um dos β-algarismos 0, 1, 2, ... aparece ao escrevermos os números de 1 a $(100)_\beta$ inclusive?

Problema 2.7.8. Responda e justifique usando apenas a base três: **a)** qual é o menor número com $(12)_{tres}$ dígitos? **b)** qual é o maior? **c)** quantos números existem com $(12)_{tres}$ dígitos?

Problema 2.7.9. No sistema de base β, qual é o menor número com n dígitos? Qual é o maior? Quantos números existem com n dígitos?

Problema 2.7.10. Transporte: **a)** $(21022)_{três}$ para o sistema decimal; **b)** 6477 para o sistema hexadecimal; **c)** 3107 para o sistema duodecimal; **d)** $(2A0B3)_{doze}$ para o sistema binário.

Problema 2.7.11. Explique algebricamente por que funciona a tabela de conversão entre as representações binária e octal, apresentada na página 33.

Problema 2.7.12. Construa uma tabela de conversão entre os sistemas binário e hexadecimal. Explique como se converte uma representação para outra, com justificativas. Usando essa tabela transponha $(1001101011100)_{dois}$ para o sistema hexadecimal. Transporte $(5F60AD)_{dezesseis}$ para o sistema binário. Essa ideia pode ser usada para outros conjuntos de sistemas?

Problema 2.7.13. A Ciência da Computação utiliza uma lista de dois algarismos hexadecimais para representar caracteres e sinais de texto. Essa lista vai de 00 até FF. Essas representações constituem a chamada tabela ASCII. Calcule (na base dez e na base dezesseis) quantas representações podem ser obtidas dessa forma.

Problema 2.7.14. A Ciência da Computação utiliza uma lista de seis algarismos hexadecimais para representar cores. Essa lista vai de 000000, que representa a cor preta, até FFFFFF, que representa a cor branca. Outras cores têm representações intermediárias. Calcule (na base dez e na base dezesseis) quantas cores podem ser representadas dessa forma.

Problema 2.7.15. Um estudante sugeriu o seguinte método para encontrar a representação decimal de $(35)_{doze}$. Como na base doze existem dois algarismos a mais que na base dez, calculamos $3 \times 2 = 6$, e $35 + 6 = 41$. Portanto, concluiu o estudante, $(35)_{doze} = 41$. Para obter a representação decimal de $(25)_{seis}$, ele fez $2 \times 4 = 8$, e $25 - 8 = 17$, portanto $(25)_{seis} = 17$. Confira, explique e verifique se o método funciona sempre.

Problema 2.7.16. Decida sobre uma convenção para os algarismos da base cem. Transponha 12 709 483 705 para a base cem.

Problema 2.7.17. Encontre a representação binária dos números de Fermat $2^{2^s} + 1$, $s = 0$, 1, 2, ...

Problema 2.7.18. Iniciando de 1, conte no sistema fatorial uma quantidade de números suficiente para você perceber a regra do sucessor e descrevê-la.

2.8 Sistemas de numeração posicionais históricos

A concepção teórica e a difusão social de um sistema de numeração são mais complexas para os sistemas posicionais que para os aditivos. Por isso ficamos admirados quando lemos que a civilização suméria desenvolveu um sistema posicional no terceiro milênio a. C. e o utilizava em suas escolas. Percebemos também que devido à heterogeneidade das raças e às dificuldades de registro e comunicação, civilizações posteriores, como a dos gregos e a dos romanos, se contentaram com sistemas aditivos, por opção ou por desconhecerem os sistemas posicionais.

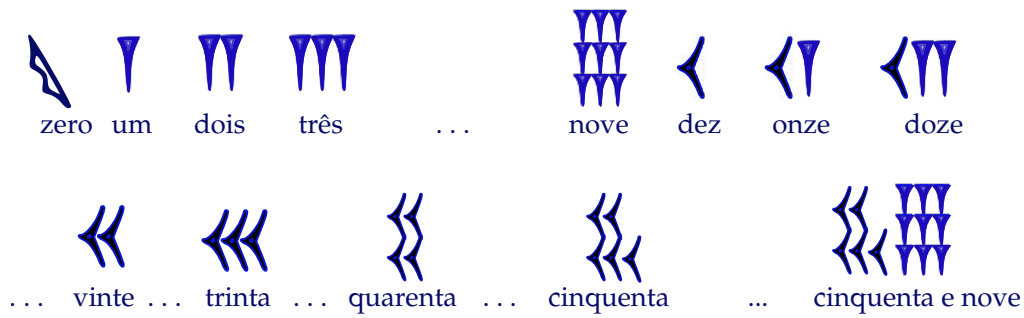
Os sistemas posicionais registrados nos livros de história são o sistema sexagesimal dos sumérios, o sistema vigesimal dos maias e o sistema decimal dos hindus.

O sistema sexagesimal sumério

A surpreendente civilização suméria se desenvolveu na Mesopotâmia a partir do quarto milênio a. C. Utilizava um sistema posicional de base sessenta, que permitiu certa facilidade em realizar cálculos aritméticos e investigar propriedades dos números.

A técnica de escrita dos sumérios consistia em imprimir símbolos em tábulas de barro usando estilos com pontas de formatos variados. Uma dessas formas era a cunha, e por isso os caracteres sumérios são denominados *cuneiformes* (em forma de cunha). Diferentes caracteres eram obtidos variando-se a inclinação do estilo. As tábulas eram depois cozidas até endurecer, constituindo um registro durável.

Este método acarretava uma séria limitação, pois os símbolos assim disponíveis eram reduzidos. Para seu sistema de numeração os sumérios reservaram apenas dois caracteres, que representavam os números 1 e 10. Posteriormente introduziram um símbolo para o zero. Os desenhos mais usados hoje em dia para esses símbolos são:

Para aplicar o sistema posicional de base sessenta os sumérios necessitavam de símbolos para os algarismos de zero a 59. Com apenas três caracteres à disposição, escreviam esses algarismos através de um sistema aditivo, de acordo com a seguinte lista:

Usando esses algarismos os números naturais eram representados no método posicional. Exemplos:

$2 \times 60^2 + 3 \times 60 + 33$

$5 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 2 \times 60 + 0$

De acordo com notação proposta em [75] e já comentada na página 32, podemos utilizar uma forma compacta para a base sexagesimal, como nos exemplos

$$27 \times 60^2 + 3 \times 60 + 33 = (27, 3, 33)_{sessenta}$$
$$53 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 2 \times 60 + 19 = (53, 0, 2, 19)_{sessenta}$$

Os sumérios às vezes simplificavam a escrita de números pequenos usando um símbolo subtrativo. Observamos também que o caractere que representava o zero foi utilizado a partir de 300 a. C., mesmo assim muitas vezes era escrito apenas quando estava posicionado entre outros caracteres, sendo omitido quando deveria aparecer no final da representação. Antes da implementação do símbolo para o zero as casas vazias de uma determinada representação tinham que ser percebidas pelo contexto.

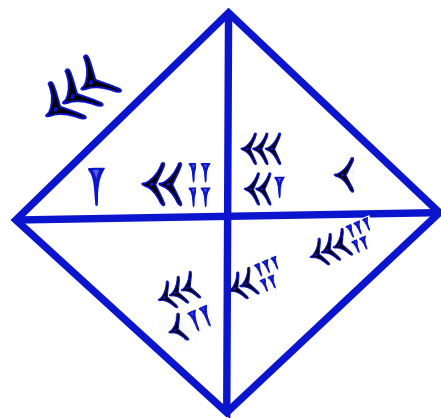
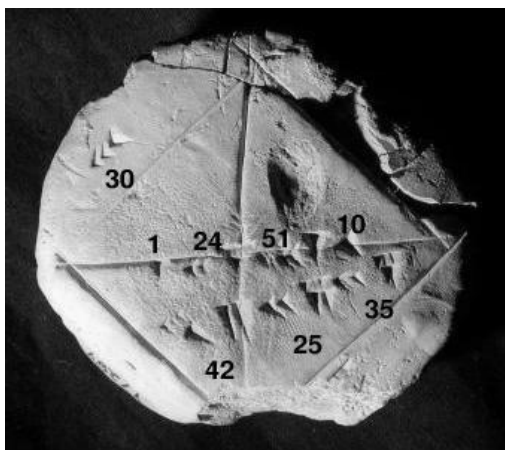



Figura 2.4. Tablete sumério mostrando numerais babilônicos, encontrado na Mesopotâmia e datado de 1800-1600 a. C. Exposto na *Yale Babylonian Collection's Tablet YBC 7289*. Fotografia de Bill Casselman. Sobre a licença para uso da imagem veja mais detalhes na página 236. Sobre o significado dos números nesse tablete confira [85], pág. 39 e seguintes.

O sistema numérico maia

A surpreendente civilização maia, de origem desconhecida, deixou-nos inúmeros registros de sua ciência. Sua escrita numérica utilizava um sistema posicional baseado na sequência 1, 20, $18 \cdot 20$, $18 \cdot 20^2$, ... Os glifos maias usados para representar os algarismos estão dispostos na tabela abaixo:

zero	5	10	15
1	6	11	16
2	7	12	17
3	8	13	18
4	9	14	19

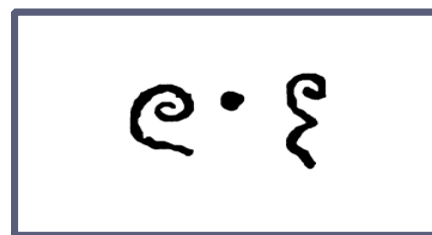
Os maias escreviam os números dispondo os dígitos verticalmente em uma coluna, com o dígito de maior valor colocado na parte de cima. Vejamos um exemplo:

$$19 \times 18 \cdot 20 + 0 \times 20 + 13$$

Os maias subdividiam o ano em 18 meses de 20 dias cada, perfazendo 360 dias. Acrescentavam 5 dias dedicados ao lazer e ao culto. Talvez isso explique por que utilizavam um sistema posicional misto com bases 20 e 18.

2.9 Pequena história do sistema de numeração decimal

Os hindus desenvolveram, nos primeiros séculos da nossa era, um sistema posicional decimal. Os historiadores não têm clareza se esta invenção foi independente ou se teve influências externas. O que se sabe com certeza é que no Século IV já utilizavam a notação posicional, mas sem um símbolo para o zero. A mais antiga e conhecida ocorrência de um símbolo para o zero entre os hindus se encontra em uma inscrição do ano de 876. Mas seu uso pode ser ainda mais antigo conforme informação que consta na Figura 2.5.

Figura 2.5. Desenho cotado de antiga inscrição localizada nas ruínas de um templo em Angkor, atual Camboja, e datada do ano de 683. Mostra o numeral 605 em caracteres Khmer, que por sua vez são derivados de caracteres hindus. É o mais antigo registro conhecido do uso de um símbolo para o zero em um sistema de numeração posicional decimal.

Com a expansão da civilização árabe, seus estudiosos entraram em contato com o sistema de numeração decimal praticado pelos hindus. No Século VIII traduziram uma obra hindu contendo tabelas astronômicas. Os estudiosos árabes da escola de Bagdá tomaram contato

com esse sistema, e reconheceram seu valor. Em 825 aproximadamente o matemático de origem persa al-Khowarizmi descreveu o sistema hindu de maneira completa em um pequeno livro.

A presença política e econômica dos árabes na Europa propiciou o aparecimento do sistema hindu entre os estudiosos latinos. Por volta de 980 esse sistema era estudado na Espanha. O livro de al-Khowarizmi foi traduzido para o latim aproximadamente em 1120, talvez por Adelardo de Bath, recebendo o nome de *Liber algorismi de numero hindorum.* Estudiosos europeus de vários países e das mais diversas áreas do conhecimento perceberam as vantagens do sistema posicional decimal em relação ao sistema romano vigente. Apesar disso o sistema decimal levou mais de quatro séculos para substituir o sistema romano, pois houve uma grande oposição de várias correntes de pensamento. Um dos autores que mais contribuíram para a divulgação do sistema decimal foi Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, que em 1202 publicou sua obra chamada *Liber Abaci* (O livro do Ábaco), em que explica o uso do sistema decimal. Em 1500 aproximadamente o sistema decimal estava definitivamente aceito na Europa.

O sistema de numeração posicional decimal é também conhecido por *sistema hindu-arábico*, devido à sua origem histórica.

Observamos que o sistema decimal passou por muitas transformações durante sua história. Os símbolos manuscritos dos algarismos tiveram as mais variadas grafias, e se estabilizaram apenas com a invenção da imprensa. Também variou a forma de compor e dispor os dígitos de um dado número. Por exemplo, o autor de [103], vol. II, página 77, cita um manuscrito de 1384 em que o número 1384 aparece escrito como 1000.300.80.4, e cita um outro manuscrito em que o número 5782 está escrito na forma 5.7.8.2.

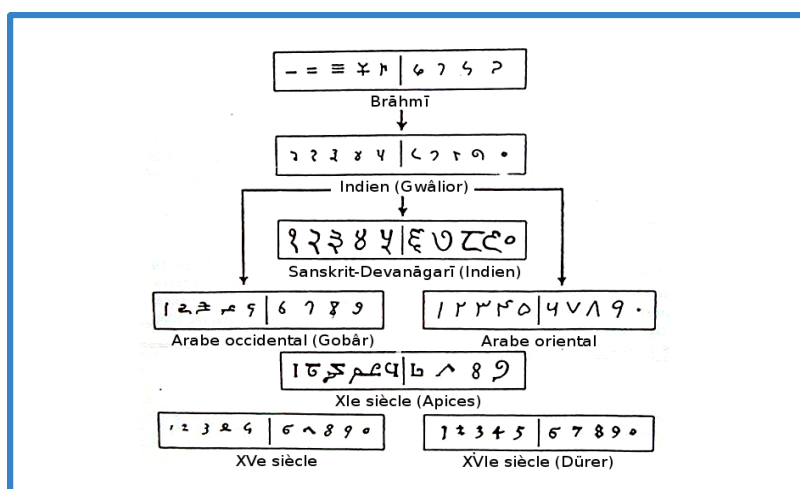



Figura 2.6. O desenho dos símbolos dos algarismos hindu-arábicos passou por muitas modificações ao longo da história. Nesta ilustração, cotada de [25], págs. 105–121, vemos algumas dessas representações.

Desde o Século XIII se percebeu ser necessária uma ajuda para facilitar a visualização na grafia de grandes números. Os dígitos do número eram separados em classes, contando da direita para a esquerda. Em geral as classes tinham três dígitos, como ainda se faz hoje, mas foram consideradas classes de seis dígitos, ou ainda quatro dígitos na primeira classe e três em cada uma das classes seguintes.

Seguem alguns exemplos transcritos de [103], vol. II, página 87.

$\widehat{678}\,\widehat{935}\,\widehat{784}\,\widehat{105}\,296$	(ano de 1202)
$\dot{4}.5.9.\dot{3}.6.2.\dot{9}.0.2.2$	(ano de 1503)
230|864|089|015|340	(ano de 1558)

2.10 O sistema de numeração da língua portuguesa

A "Última flor do Lácio, inculta e bela"[1] dá nome aos números naturais seguindo um sistema não posicional, com uma estrutura similar ao sistema alfabético dos antigos gregos e com nomes para os números herdados principalmente da língua latina.

Os *numerais*, na língua portuguesa, constituem um grupo especial de palavras, e podem ser classificados em cardinais, ordinais, multiplicativos e fracionários.

Os **numerais cardinais** são os nomes dos números naturais. Indicam uma quantidade definida de seres ou objetos. Os vocábulos básicos utilizados para nomear os números de zero a 1000 estão indicados na primeira tabela abaixo:

	Numeral cardinal		**Numeral cardinal**
0	zero	20	vinte
1	um	30	trinta
2	dois	40	quarenta
3	três	50	cinquenta
4	quatro	60	sessenta
5	cinco	70	setenta
6	seis	80	oitenta
7	sete	90	noventa
8	oito	100	cem
9	nove	200	duzentos
10	dez	300	trezentos
11	onze	400	quatrocentos
12	doze	500	quinhentos
13	treze	600	seiscentos
14	quartorze	700	setecentos
15	quinze	800	oitocentos
16	dezesseis	900	novecentos
17	dezessete	1000	mil
18	dezoito		
19	dezenove		

Os numerais de 21 a 99 são compostos justapondo-se a unidade à dezena. Não se lê a casa vazia. Exemplos:

vinte e um (21) cinquenta e nove (59) oitenta (80)

[1] Olavo Bilac, *Língua Portuguesa*, [13], pág. 240.

Os numerais de 101 a 999 são compostos justapondo-se a unidade à dezena e esta à centena. Usa-se cento em vez de cem. Intercala-se a conjunção *e* entre as centenas e dezenas e entre estas e a unidade. Exemplos:

cento e trinta e oito (138)   duzentos e sete (207)   trezentos e noventa e quatro (394)

Para a leitura dos números com mais de três dígitos separamos esses dígitos em grupos de três, a partir da direita, podendo ocorrer que o último grupo fique com um, dois ou três dígitos. Esses grupos de dígitos são denominados *classes*.

As classes são contadas da direita para a esquerda. A primeira classe é chamada *classe das unidades*, a segunda de *classe dos milhares*, a terceira de *classe dos milhões*, e assim por diante, cada classe recebe o nome da menor casa que inicia a classe. A tabela traz, a título de sugestão, nomes para as classes, mas observamos que não existe consenso. Por exemplo, o termo *bilhão*, que no Brasil hoje significa *mil milhões*, representava antigamente *um milhão de milhões*, e conserva esse valor em Portugal e nos países de língua espanhola. Confira observação adicional feita no final da Seção 2.11, na página 45. Existem também grafias diferentes, por exemplo, alguns dicionários preferem as formas *bilião*, *trilião*, etc.

	Nome da classe		**Nome da classe**
10^3	mil	10^{33}	decilhão
10^6	milhão	10^{36}	undecilhão
10^9	bilhão	10^{39}	duodecilhão
10^{12}	trilhão	10^{42}	tredecilhão
10^{15}	quatrilhão	10^{45}	quatuordecilhão
10^{18}	quintilhão	10^{48}	quindecilhão
10^{21}	sextilhão	10^{51}	sexdecilhão
10^{24}	septilhão	10^{54}	septendecilhão
10^{27}	octilhão	10^{57}	octodecilhão
10^{30}	nonilhão	10^{60}	novendecilhão

Na leitura de um número as classes são nomeadas da esquerda para a direita. Em cada classe os dígitos são nomeados com as mesmas regras que as dos números de 1 a 999, seguindo-se o nome da classe, exceto a primeira, que não é nomeada. Vejamos alguns exemplos.

1972   um mil novecentos e setenta e dois

27 309 617   vinte e sete milhões trezentos e nove mil seiscentos e dezessete

394 938 279 719   trezentos e noventa e quatro bilhões novecentos e trinta e oito milhões duzentos e setenta e nove mil setecentos e dezenove

Em cada classe, quando necessário, os dígitos podem ser denominados, da direita para a esquerda, como unidades, dezenas e centenas da classe. Por exemplo, em 654 321 temos 4 unidades de milhares, 5 dezenas de milhares e 6 centenas de milhares. Se o dígito é da primeira classe, esta não é nomeada. Assim em 654 321 temos 1 unidade, 2 dezenas e 3 centenas.

Os **numerais ordinais** assinalam o lugar que seres ou coisas ocupam em uma série ordenada. Os vocábulos básicos utilizados para os ordinais estão listados na tabela da página 43.

Também se usam décimo primeiro para o ordinal de 11, décimo segundo para o de 12, setuagésimo para o de 70, sexcentésimo para o de 600, setingentésimo para o de 700 e nongentésimo para o de 900.

A representação ordinal dos números é composta aditivamente. Até 2000 a nomenclatura dos ordinais utiliza os nomes da tabela. Na grafia de um número usamos um pequeno círculo superposto e um ponto para indicar que se trata de um ordinal. Exemplos:

29º vigésimo nono

186º centésimo octogésimo sexto

1543º milésimo quingentésimo quadragésimo terceiro

De 2000 em diante a nomenclatura dos ordinais segue outra regra, em que o primeiro numeral é cardinal. Exemplo:

3713º três milésimos septingentésimo décimo terceiro

Os números redondos constituem exceção: 10 000º décimo milésimo.

Os ordinais variam em gênero e número: primeira da fila; os primeiros a chegar; décima quinta viagem, 29ª (vigésima nona).

	Numeral ordinal		**Numeral ordinal**
		20	vigésimo
1	primeiro	30	trigésimo
2	segundo	40	quadragésimo
3	terceiro	50	quinquagésimo
4	quarto	60	sexagésimo
5	quinto	70	septuagésimo
6	sexto	80	octogésimo
7	sétimo	90	nonagésimo
8	oitavo	100	centésimo
9	nono	200	ducentésimo
10	décimo	300	trecentésimo
11	undécimo	400	quadringentésimo
12	duodécimo	500	quingentésimo
13	décimo terceiro	600	seiscentésimo
14	décimo quarto	700	septingentégimo
15	décimo quinto	800	octingentésimo
16	décimo sexto	900	noningentésimo
17	décimo sétimo	1000	milésimo
18	décimo oitavo	1 000 000	milionésimo
19	décimo nono	1 000 000 000	bilionésimo

Em alguns casos o ordinal é substituído pelo cardinal correspondente. Na designação de papas, soberanos, séculos, partes de livros e peças, usam-se os ordinais até décimo, e daí por diante o cardinal, sempre que o numeral vier depois do substantivo. Exemplos:

Henrique VIII (lê-se Henrique oitavo) Leão XIII (lê-se Leão treze)

Século X (lê-se Século décimo) Século XI (lê-se Século onze)

Capítulo II (lê-se Capítulo segundo) Capítulo XXVI (lê-se Capítulo vinte e seis)

Quando o numeral antecede o substantivo se usa o ordinal: décimo primeiro século, quadragésimo terceiro século, etc.

Na numeração de artigos de leis, portarias, decretos, usam-se os ordinais até nove, e daí por diante o cardinal. Exemplos:

Artigo 9º (lê-se Artigo nono) Artigo 10 (lê-se Artigo dez)

Na designação dos dias do mês usam-se os cardinais, salvo para o primeiro dia. Na enumeração de casas, apartamentos, cabines, etc. usa-se o ordinal se o numeral vier anteposto, e o cardinal se posposto.

Exemplos:

primeiro de outubro vinte e sete de maio

Folha 3 (lê-se folha três) 3ª. folha (lê-se terceira folha)

Os **numerais multiplicativos** designam resultado de multiplicação. São eles:

Numeral multiplicativo	**cardinal correspondente**
duplo ou dobro	duas vezes
triplo	três vezes
quádruplo	quatro vezes
quíntuplo	cinco vezes
sêxtuplo	seis vezes
sétuplo	sete vezes
óctuplo	oito vezes
nônuplo	nove vezes
décuplo	dez vezes
undécuplo	onze vezes
duodécuplo	doze vezes
cêntuplo	cem vezes

Os numerais multiplicativos *dobro, duplo e triplo* são de uso corrente, e os demais costumam ser substituídos pelo cardinal correspondente, seguido da palavra *vezes*. As formas *dúplice* e *tríplice* são adjetivos.

Os numerais multiplicativos, exceto *dobro*, variam em gênero e número. Exemplo: vida dupla.

Os **numerais fracionários** designam a parte resultante de divisão por um número natural ≥ 2.

Os numerais fracionários têm apenas as seguintes formas próprias: meio, ou metade, e um terço. Os demais numerais fracionários são construídos da forma descrita a seguir.

De um quarto a décimo usam-se os ordinais correspondentes, e também para as dezenas e centenas e para mil. Para os outros casos usa-se o cardinal correspondente seguido da palavra *avos*. O numeral fracionário é sempre antecedido de um cardinal que indica a quantidade de partes tomadas. Exemplos:

$1/20$ um vigésimo

$5/11$ cinco onze avos

$1/100$ um centésimo

Na fala a expressão *meia-dúzia*, ou simplesmente *meia*, substitui o cardinal seis quando a clareza se torna importante (ao enunciar números de telefone, por exemplo).

Destacamos finalmente a existência de *substantivos coletivos* que se caracterizam por denotarem um conjunto de seres ou coisas em quantidade determinada. Exemplos: par, biênio, triênio, quadriênio, lustro ou quinquênio, sexênio, setênio, novena, dezena, década ou decênio, duodecênio, dúzia, vintena, centena, cento, centúria, centenário, grosa, milhar, milheiro, milênio, sesquicentenário.

2.11 Os números e a legislação brasileira

No Brasil a escrita dos números é regulada pela Resolução nº 12/88 do CONMETRO. Transcrevemos, *ipsis litteris*, o item 3.4.2 dessa Resolução:

3.4.2 - Os números que representam quantias em dinheiro, ou quantidades de mercadorias, bens ou serviços em documentos para efeitos fiscais, jurídicos e/ou comerciais, devem ser escritos com os algarismos separados em grupos de três, a contar da vírgula para a esquerda e para a direita, com pontos separando esses grupos entre si. Nos demais casos é recomendado que os algarismos da parte inteira e os da parte decimal dos números sejam separados em grupos de três, a contar da vírgula para a esquerda e para a direita, com pequenos espaços entre esses grupos (por exemplo, em trabalhos de caráter técnico ou científico), mas é também admitido que os algarismos da parte inteira e os da parte decimal sejam escritos seguidamente (isto é, sem separação em grupos).

Neste livro optamos por não usar pontos para separar as classes, mas pequenos espaços para números com seis dígitos ou mais quando for necessário proporcionar mais clareza.

Números de séries especiais podem ter outras grafias. Exemplos:

O telefone da empresa é (976)456-34577654
O número da agência bancária é 23.001-0
Resolução nº 12/88 do CONMETRO

O Brasil é signatário do Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI), no qual existe a chamada regra dos 6N, segundo a qual se passa do milhão (10^6) para o bilhão com o acréscimo de seis zeros (10^{12}), a trilhão com o acréscimo de mais seis zeros (10^{18}), e assim por diante. O Brasil, os Estados Unidos e outros países usam bilhão para 10^9 desrespeitando com isso o SI.

Para respeitar o SI precisaríamos usar os nomes milhão (10^6), mil milhões (10^9), bilhão (10^{12}), mil bilhões (10^{15}), etc.

2.12 Problemas adicionais

Problema 2.12.1. Os sumérios usavam um sistema posicional de base sessenta, os maias, de base vinte, e os hindus, de base dez. Nossa civilização também escolheu a base dez. Você acha que essa foi a melhor escolha? Por quê? Não seria melhor a base sessenta? ou a vinte?

Problema 2.12.2. Descreva pelo menos uma vantagem: **a)** do sistema numérico jônico sobre o hieroglífico egípcio; **b)** do hieroglífico egípcio sobre o romano, **c)** do romano sobre o hieroglífico egípcio; **d)** do sumério sobre o maia; **e)** do decimal sobre o sumério; **f)** do maia sobre o sumério; **g)** do binário sobre o decimal; **h)** do decimal sobre o binário.

Problema 2.12.3. Represente 8397 no sistema maia.

Problema 2.12.4. Verifique se na língua vernácula a representação dos números cumpre as condições de existência e unicidade. Conforme explicamos na página 5, essas são duas importantes qualidades de um sistema de numeração: a da existência, em que todo número natural tem representação no sistema; e a da unicidade, em que a representação de qualquer número natural no sistema é única. Observamos que um sistema de numeração pode ser muito útil e não possuir essas qualidades.

Problema 2.12.5. Explique a seguinte frase. Existem 10 tipos de pessoas: as que conhecem o sistema de numeração binário e as que não conhecem.

Problema 2.12.6. Uma escola deseja distribuir R$ 1.234,00 entre seus estudantes em prêmios de R$ 1,00, R$ 8,00, R$ 64,00 e R$ 512,00 reais cada. Qual é o menor número de prêmios que se pode atribuir de modo que seja utilizada toda a quantia disponível? Justifique e interprete o resultado.

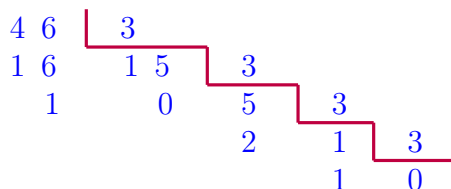
Problema 2.12.7. Quantos e quais são os números naturais de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

Problema 2.12.8. Encontre todos os dígitos decimais a e b tais que $(8ab1)_{dez}$ seja o quadrado de um número natural.

Problema 2.12.9. Supondo que 0, 1, 2, 3, 4, ... sejam algarismos de uma certa base β, descubra todos os valores de β que tornam verdadeira a seguinte afirmação: $(14)_\beta \times (14)_\beta = (232)_\beta$.

Problema 2.12.10. Descreva as regras necessárias para representar os números no sistema posicional de base quatro em um ábaco (assuma o ábaco descrito no início da Seção 2.4). E em uma base β qualquer?

Problema 2.12.11. Seja a um número natural cuja representação na base β tem $2n$ dígitos. Mostre que a se escreve na forma $a = b + c\beta^n$, sendo b e c números naturais, c com n dígitos e b com uma quantidade de dígitos $\leq n$.

Problema 2.12.12. Para transpor 46 para a base três podemos fazer divisões sucessivas da seguinte forma:

Diga qual a representação de 46 na base três e justifique.

Problema 2.12.13. **a)** Verifique que para todo $\beta \geq 3$ o número $(121)_\beta$ é quadrado de $(11)_\beta$. **b)** Encontre um número natural > 1 na base β que é um cubo de outro número natural para todo $\beta \geq 4$. E quanto a potências quárticas e quínticas?

Problema 2.12.14. Todo número natural n pode ser escrito como soma de diferentes potências de 2. Por exemplo, $21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$ e $37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$. **a)** Escreva como soma de potências diferentes de 2 os números: 109; 5937; 71861. **b)** Descreva um ou dois métodos que permitam representar um dado número natural > 0 como soma de diferentes potências de 2. **c)** Explique qual é a relação entre a representação binária de um número natural e sua representação como soma de diferentes potências de 2. Sua explicação confirma nossa afirmação inicial, de que todo número natural n pode ser escrito como soma de diferentes potências de 2?

Problema 2.12.15. Sejam a um número natural e $\beta \geq 2$ uma base. Usando logaritmos encontre uma fórmula que forneça, em função de a e β, a quantidade de dígitos da representação de a na base β.

Problema 2.12.16. Ao representar um número natural a na base β em um ábaco, colocamos no máximo $\beta - 1$ pedrinhas em cada casa. Se representarmos vários números, tomados aleatoriamente, em média vamos colocar $(\beta - 1)/2$ pedrinhas em cada casa. Sabemos do problema anterior que a quantidade de casas ocupadas para representar a é aproximadamente $\ln(a)/\ln(\beta)$. Portanto, se gastamos 1 segundo para colocar uma pedrinha no ábaco, em média, então, em média gastamos

$$\frac{\ln(a)}{2}\,\frac{\beta - 1}{\ln(\beta)}$$

segundos para representar a. Fixado a, encontre a base β que proporciona menor gasto de tempo.

Problema 2.12.17. **a)** Verifique que se um número tem d dígitos no sistema decimal, então no sistema binário terá aproximadamente $3{,}32\,d$ dígitos. **b)** Verifique que se um número tem d dígitos no sistema decimal, então no sistema sexagesimal terá um pouco mais da metade, aproximadamente $0{,}56\,d$.

Problema 2.12.18. Determine a quantidade total de dígitos (decimais) que são escritos ao se representar um a um os números naturais 1, 2, 3, ..., 10^n.

Problema 2.12.19. Um linotipista dispõe de 500 tipos de cada um dos dez algarismos decimais e pretende imprimir de uma vez os números naturais, um a um, a partir de 1, até N. Qual é o maior valor possível de N?

Problema 2.12.20. Defina sequências de números naturais da seguinte forma. Dado um número natural n, o elemento seguinte da sequência é a soma dos quadrados dos dígitos da representação decimal de n. E assim sucessivamente. Por exemplo,

$$55 \to 50 \to 25 \to 29 \quad \ldots$$

Estude o comportamento dessas sequências.

2.13 Sugestões de atividades orientadas

Atividade 2.13.1. Faça uma pesquisa sobre o valor do termo *bilhão* nos mais diversos países.

Atividade 2.13.2. Pesquise quais são os sistemas numéricos usados correntemente nos mais diversos países na atualidade. Particularmente descubra se existem países que adotam o sistema decimal mas nos quais a grafia dos algarismos seja diferente da nossa.

Atividade 2.13.3. Pesquise em livros de História da Matemática o antigo sistema de numeração chinês em barras assim como o sistema de agrupamentos multiplicativos chinês-japonês.

Atividade 2.13.4. Estude os diversos tipos de ábacos utilizados pela humanidade.

Atividade 2.13.5. Em um livro de Matemática para professores pode-se ler a frase (adaptada): "As principais motivações para o desenvolvimento da Matemática são as necessidades práticas e operacionais". Faça uma análise desse discurso.

Atividade 2.13.6. Em nossa civilização os números são frequentemente usados como código. Por exemplo, nos sistemas de telefonia os números são tomados como símbolos, e não importa seu valor. Em outras situações o valor é usado parcialmente, por exemplo quando existem dígitos verificadores. Faça uma pesquisa sobre esse assunto.

Atividade 2.13.7. Em um livro de Matemática para professores pode-se ler o seguinte (adaptado): "O sistema de numeração que utilizamos demorou séculos para ser desenvolvido. Isso nos dá uma ideia de que esse sistema de numeração não é simples, e que sua compreensão pelas crianças deve ser cuidadosamente desenvolvida".

Faça uma análise do que ocorre no ensino do sistema decimal nas escolas fundamentais, pesquisando na literatura especializada ou fazendo suas próprias investigações.

Capítulo 3

A arte de calcular

3.1 Introdução

O que são as operações da Aritmética?

O que são algoritmos para essas operações?

Como calcular em bases não decimais?

Apresentamos, neste capítulo, as quatro operações fundamentais da Aritmética, a saber, a *adição*, a *subtração*, a *multiplicação* e a *divisão*. Dedicar-nos-emos particularmente ao estudo dos conceitos dessas operações e da gênese dos algoritmos usualmente utilizados para implementá-las.

Designar essas quatro operações como *operações fundamentais* é um costume de nossa época. Conceitualmente poderíamos dizer que a adição é a única operação fundamental, pois todas as outras dela derivam.

Na História da Matemática a ideia de operação fundamental passou por várias mudanças. De acordo com [103], volume II, página 32, na primeira metade do segundo milênio eram consideradas, na Europa, sete operações fundamentais, às vezes nove, a saber: numeração, adição, subtração, duplicação, mediação (divisão por dois), multiplicação, divisão, progressão e radiciação. Neste contexto, progressão significa potenciação. A duplicação e a mediação eram incluídas como operações fundamentais em virtude de serem a base de antigos algoritmos para a multiplicação e a divisão, conforme veremos.

Ao estudarmos os algoritmos das operações temos em mente que o leitor já conhece os denominados algoritmos usuais, aqueles que são ensinados na escola básica e que são correntemente aplicados quando necessitamos implementar um cálculo através da escrita em papel. Portanto nosso escopo não é o de ensinar esses algoritmos mas o de proporcionar uma reflexão sobre sua origem e sequências didáticas para seu ensino. A descrição algébrica e geral desses algoritmos não é feita neste texto e é apenas sugerida em alguns problemas.

3.2 A adição

A adição é a primeira operação fundamental da Aritmética, e dela derivam todas as outras.

3.2.1 Conceito de adição

Vimos na página 4 que todo número natural a tem um único sucessor, indicado por $a+1$. Definimos a adição de um número natural a com a unidade como a operação da qual resulta o sucessor de a.

Podemos estender este conceito, e definir a adição de um número natural a com um número natural qualquer b: ao número a adicionamos tantas unidades quantas são as unidades do número b. Mais exatamente, a adição de a e b é a operação da qual resulta um número natural definido da seguinte forma: tomamos o sucessor $a+1$ de a, em seguida o sucessor de $a+1$, e assim por diante, realizamos a ação "tomar o sucessor" tantas vezes quantas são as unidades de b.

Por exemplo, para adicionar dois a três, fazemos, sucessivamente,

$$(1+1+1)+1 = 1+1+1+1 \quad \text{e} \quad (1+1+1+1)+1 = 1+1+1+1+1$$

e o resultado é cinco.

Fica assim determinada a *operação de adição*, que associa a dois números naturais a e b um terceiro número natural c, chamado *soma* de a e b. Indicamos a soma de a e b por $a+b$ (lê-se: a mais b).

A operação de adição pode também ser entendida como uma reunião. Dados números naturais a e b, consideramos uma cesta com a bolinhas e uma segunda cesta com outras b bolinhas. Reunindo as bolinhas em uma única cesta, a quantidade de bolinhas nesta última é $a+b$.

Observemos que a operação de adição satisfaz duas importantes propriedades: comutatividade e associatividade.

A *propriedade comutativa da adição* significa que dados quaisquer números naturais a e b se tem $a+b = b+a$. Dessa forma para encontrar a soma $a+b$ podemos proceder de duas maneiras: começar com a e tomar os sucessores $a+1$, $a+1+1$, ... (b vezes), ou começar com b e tomar os sucessores $b+1$, $b+1+1$, ... (a vezes). Para se convencer da validade desta propriedade o estudante pode fazer a seguinte imagem. Considere dois cestos A e B com a e b bolinhas respectivamente. Tome uma a uma as bolinhas de B e as coloque em A. Quando terminar, a quantidade de bolinhas em A é $a+b$. Depois faça o contrário: tome uma a uma as bolinhas de A e as coloque em B. Quando terminar, a quantidade de bolinhas em B é $b+a$. Como as quantidades resultantes são as mesmas, então $a+b = b+a$.

A *propriedade associativa da adição* significa que dados quaisquer números naturais a, b e c se tem $(a+b)+c = a+(b+c)$. Isto significa que para adicionar três números a, b e c podemos proceder de duas maneiras: primeiro adicionar a com b, tomar o resultado e adicionar a c; ou então primeiro adicionar b com c, tomar o resultado e adicionar a a. A propriedade associativa afirma que o número resultante é o mesmo. O estudante pode se convencer da validade desta afirmação tomando três cestas A, B e C com a, b e c bolinhas respectivamente, e imaginando os dois procedimentos.

Observamos que podemos definir a adição de três ou mais números naturais. Por exemplo, para três números a definição ficaria assim: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, sua *soma* é $a+b+c = (a+b)+c$. As propriedades comutativa e associativa implicam que não importa a ordem com que os números são somados.

Na adição os números que estão sendo adicionados chamam-se *termos* ou *parcelas*, e o número que resulta da operação chama-se *soma* ou *total*.

3.2.2 Algoritmos para a adição

Efetuar a operação de adição em um sistema de numeração significa obter e representar, neste sistema, a soma de dois ou mais números naturais. O mesmo significado tem as expressões *calcular a soma*, *somar* ou *adicionar*.

Chamamos de *algoritmo para a adição* a qualquer método que permite calcular a soma de dois ou mais números em um sistema de numeração.

Os algoritmos mais simples que podem ser utilizados para efetuar a operação de adição constituem aplicação imediata dos dois conceitos de adição: "acrescentar" e "reunir".

Por exemplo, dados os números $a = 7$ e $b = 6$ no sistema decimal, vamos calcular a sua soma acrescentando as unidades de b às unidades de a, uma a uma. Temos:

$$\begin{array}{rcll} 7+1 & = & 8 & \text{(uma vez)} \\ 8+1 & = & 9 & \text{(duas vezes)} \\ 9+1 & = & 10 & \text{(três vezes)} \\ 10+1 & = & 11 & \text{(quatro vezes)} \\ 11+1 & = & 12 & \text{(cinco vezes)} \\ 12+1 & = & 13 & \text{(seis vezes)} \end{array}$$

Portanto, $7+6 = 13$ no sistema decimal. Vemos que, para somar, teoricamente precisamos apenas saber contar, ou saber "tomar o sucessor".

Por outro lado, para efetuar $7+6$ tendo em vista que a adição é uma reunião, tomamos uma cesta A com 7 bolinhas e uma cesta B com 6 bolinhas (ou desenhamos essas bolinhas), reunimos e contamos. O resultado é novamente 13.

(•••• •••) + (••• •••) = (••••••• ••••••)

Vemos que para representar a soma de dois números naturais em qualquer sistema de numeração necessitamos apenas saber contar nesse sistema. Mas quando precisamos somar números maiores percebemos a necessidade de desenvolver algoritmos rápidos e compactos para a adição. Imagine o que seria efetuar $1735 + 1463$ "tomando o sucessor", ou usando bolinhas!

Interessa-nos estudar os algoritmos de adição para o sistema decimal. Mas como muitos estudantes têm curiosidade em saber como efetuar a adição nos sistemas romano e egípcio, vamos dar alguns exemplos.

Nos sistemas aditivos o método da reunião parece ser mais conveniente. Vejamos um exemplo com o sistema hieroglífico egípcio. Pretendemos somar os números

||| ∩
||| ∩∩ 𓍢 e || ∩∩∩∩
||| ∩∩∩∩

Inicialmente agrupamos os símbolos do mesmo tipo. Obtemos

| ∩
||||| ∩∩∩∩∩
||||| ∩∩∩∩∩ 𓍢

Rearranjamos os grupos, substituindo símbolos de menor valor por um de maior valor.

Começando com as unidades temos:

𓎆𓎆
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓍢
𓏺 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆

Mais um rearranjo e terminamos:

𓏺 𓎆𓎆 𓍢 𓍢

A adição no sistema romano era usualmente implementada em ábacos seguindo essa mesma técnica de ajuntamento. Vemos abaixo uma forma de obter a soma de MDCCCLXXVIII com DCCXXXVI em um ábaco romano com sulcos horizontais. O ábaco era repartido em três colunas. Desenhamos colunas adicionais para representar os movimentos realizados com as pedrinhas.

Na primera coluna está representado o número MDCCCLXXVIII, e na segunda, DCCXXXVI. Observe que uma pedrinha colocada entre dois sulcos representa cinco pedrinhas colocadas no sulco imediatamente abaixo, e duas pedrinhas colocadas entre dois sulcos equivale a uma pedrinha colocada no sulco imediatamente acima. Na terceira coluna vemos o primeiro movimento do cálculo, que consiste no ajuntamento das pedrinhas das colunas um e dois de uma mesma linha. Representamos nas outras colunas do desenho os movimentos seguintes. Certamente que outras opções são possíveis.

Os romanos também escreviam usando uma tábua coberta com cera e um estilo. A adição exemplificada a seguir poderia muito bem ter sido feita por um antigo romano.

LIX	
DLII	
DLLVIIIIII	(soma provisória)
DLLVVII	(rearranjo)
DCXI	(soma final)

3.2.3 Gênese dos algoritmos de adição para sistemas posicionais

O uso corrente da adição nas mais diversas aplicações exigiu o desenvolvimento de algoritmos compactos e rápidos para somar números naturais. Inicialmente o ábaco era o instrumento mais disponível para implementar as operações aritméticas. Particularmente a adição pode ser efetuada em um ábaco mediante o ajuntamento das pedrinhas e seu reajuste de modo que em cada casa não fique mais do que nove pedrinhas.

Vejamos como efetuar $15+37$ em um ábaco. Primeiro representamos 15 e 37, como na figura abaixo, à esquerda. Lembrando que dez pedrinhas na primeira casa equivalem a uma pedrinha na segunda casa, fazemos o acerto: tiramos dez pedrinhas da primeira casa e colocamos uma na segunda. O resultado é $15 + 37 = 52$, representado na figura da direita, abaixo.

Para a nossa civilização interessa implementar a adição na linguagem escrita, pois esse é o método de representação mais utilizado (por enquanto). O estudante já conhece nossa forma usual de implementar $15 + 37$:

$$\begin{array}{r} 15 \\ +37 \\ \hline 52 \end{array}$$

que representa as seguintes etapas de cálculo:

$$\begin{array}{r} 15 \\ +37 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \leftarrow \text{transporte} \\ 15 \phantom{\leftarrow \text{transporte}} \\ +37 \phantom{\leftarrow \text{transporte}} \\ \hline 2 \phantom{\leftarrow \text{transporte}} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 15 \\ +37 \\ \hline 52 \end{array}$$

O estudante pode examinar a sequência de cálculos dispostos acima e verificar que ela imita os movimentos realizados no ábaco.

Na linguagem escolar usual a unidade transportada para a casa seguinte denomina-se “um de reserva”. Também se diz “vai um”.

Nosso dispositivo usual de adição não é a única forma de transpor para a linguagem escrita o que é feito no ábaco. Um antigo dispositivo hindu pode ser visto no exemplo abaixo, em que calculamos $731 + 492$. O estudante pode imaginar os movimentos correspondentes do ábaco.

$$\begin{array}{l} 731 \\ 492 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 733 \\ 49 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 823 \\ 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 1223 \\ \end{array}$$

Outras variações do método usual, provenientes ou não do ábaco, podem ter interesse histórico e pedagógico. Vamos apresentar algumas delas, começando com a chamada “versão longa”, muito usada na Europa no Século XVI.

$$\begin{array}{r} 731 \\ +492 \\ \hline 3 \\ 12 \\ 11 \\ \hline 1223 \end{array}$$

Este é também um antigo método hindu. A soma começa a ser feita pela esquerda, e os dígitos vão sendo corrigidos à medida que for necessário.

$$\begin{array}{r} 731 \\ +492 \\ \hline 1\not{1}23 \\ 2 \end{array}$$

Os métodos de adição dos árabes seguiam de perto os métodos hindus. Vejamos três exemplos. No primeiro a soma é feita da direita para a esquerda. Os dígitos 1 da operação “vai um”

são guardados na última linha.

$$\begin{array}{r} 72373 \\ 3318 \\ 514 \\ \hline 76205 \\ \hline 111 \end{array}$$

Neste segundo exemplo a soma é feita da esquerda para a direita. O primeiro resultado é provisório, logo abaixo dele são guardados os dígitos de reserva. Em seguida são somados esses dígitos. Esta última soma foi feita da direita para a esquerda.

$$\begin{array}{l} 53732 \\ 4179 \\ 6105 \\ \hline 53906 \\ 111 \\ \hline 64016 \end{array}$$

Neste último exemplo de antigo método árabe de adição o resultado é colocado na linha superior. À direita estão os dígitos obtidos com a aplicação da prova do nove (confira página 81).

8030	2
5687	8
2343	3

Lembramos o leitor de que o ábaco e a linguagem escrita não são os únicos métodos de somar. Podemos somar sem nada registrar, guardando os dados intermediários na memória. Por exemplo, para implementar $731 + 492$, fazemos $700 + 500 = 1200$, a este valor adicionamos 30, obtendo 1230, em seguida retiramos 8, o que dá 1222, e finalmente somamos 1, do que resulta 1223. Este tipo de procedimento é denominado *técnica mental* de adição.

Pode ocorrer ainda de estarmos interessados no valor aproximado de uma soma. Por exemplo, se um livro custa 37 reais e outro 29, queremos saber se os 70 reais que temos no bolso são suficientes para pagar. Não é necessário calcular $37 + 29$, basta ver que $40 + 30 = 70$. Muitos especialistas em ensino da Matemática têm afirmado que no ensino formal da aritmética é importante desenvolver técnicas de *cálculo aproximado*.

Na adição utilizamos a seguinte nomenclatura:

$$\begin{array}{r} 978 \\ +493 \\ \hline 1471 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ parcelas ou termos} \\ \\ \longleftarrow \text{ soma ou total} \end{array}$$

Os números que são adicionados chamam-se *parcelas* ou *termos*. O resultado da adição chama-se *soma* ou *total*.

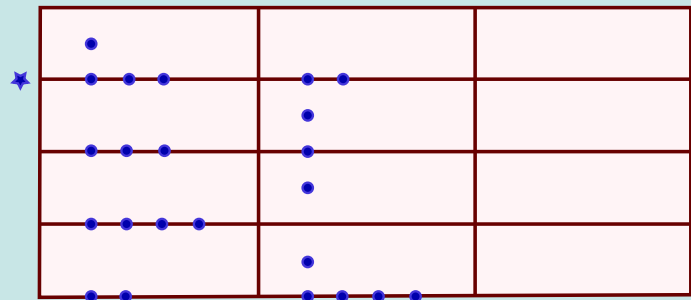
Os mesmos algoritmos e dispositivos utilizados para efetuar a adição no sistema decimal podem ser implementados em qualquer sistema posicional. Vamos exemplificar com o sistema posicional de base sete. A adição abaixo foi feita nesse sistema.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 1\ 3\ 5 \\ +\ 2\ 6\ 4 \\ \hline 4\ 3\ 2 \end{array}$$

O mecanismo do algoritmo é exatamente o mesmo do algoritmo usual de adição do sistema decimal. Ocorre apenas que a soma de dois algarismos quaisquer deve ser feita na base sete. Para calcular $5 + 4$ podemos proceder por contagem: $5 + 1 = 6$, $6 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$ e $11 + 1 = 12$. Portanto $5 + 4 = 12$ na base sete. Podemos também utilizar temporariamente a base dez: $5 + 4 = 9$, e $9 = 1 \cdot 7 + 2 = (12)_{sete}$. Portanto $5 + 4 = 12$ na base sete.

Quando fazemos uma adição no sistema decimal utilizamos automaticamente as informações que temos na memória desde a infância, que são as somas de todos os algarismos. É o que chamamos de memorizar a *tábua de adição*. Desta forma para fazer um cálculo de adição na base sete mais confortavelmente é bom termos em mãos a tábua de adição na base sete, como segue.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

Figura 3.1 Representação estilizada de um ábaco como era utilizado na Europa no século XVI, conforme está descrito no livro *Ground of Arts*, de Robert Recorde, publicado na Inglaterra em 1542. Cada linha horizontal representa uma casa do sistema decimal. A linha inferior representa a casa das unidades, e a linha assinalada com ⋆ é a casa dos milhares. Uma conta colocada entre duas linhas equivale a cinco contas posicionadas na linha imediatamente abaixo. Na figura o número 8342 está representado na primeira coluna da esquerda, e 2659 na coluna do meio. O ábaco está pronto para que seja executado o cálculo de $8342 + 2659$ ou $8342 - 2659$. Informações extraídas de [103], volume II, página 184 e seguintes.

3.2.4 Problemas

Problema 3.2.4.1. Implemente a adição dos três números abaixo como se fosse no ábaco romano. Use também linguagem escrita.

Problema 3.2.4.2. Encontre várias formas de efetuar $27 + 18$.

Problema 3.2.4.3. Na adição de três parcelas pode ocorrer um "vai dois", como no exemplo

$$\begin{array}{r} 5\overset{2}{3}7 \\ +\,629 \\ 215 \\ \hline 1381 \end{array}$$

a) Verifique que na adição de duas parcelas nunca ocorre um "vai dois", ou mais. **b)** Investigue o que ocorre na adição de três parcelas, quatro parcelas, etc. **c)** Um estudante estava adicionando algumas parcelas simultaneamente, e aconteceu um "vai doze". Em que casa deve ser somado esse doze?

Problema 3.2.4.4. Verifique em quais aspectos a versão longa da adição é mais simples do que o método usual, e em quais não é. Verifique se a versão longa evita o uso do "vai um". Será que esse método deveria ser apresentado para os estudantes nas escolas antes do método usual?

Problema 3.2.4.5. Comparando o nosso algoritmo usual de adição com suas variações descritas nesta seção, verifique qual é a que está melhor adaptada à linguagem escrita e qual proporciona maior economia de tempo.

Problema 3.2.4.6. Calcule $343 + 489$ mentalmente de várias formas de modo a obter: **a)** respostas aproximadas; **b)** a resposta exata.

Problema 3.2.4.7. Ao calcular $343 + 489$ mentalmente temos a tendência de iniciar com as centenas: $300 + 400 = 700$. Por que então o algoritmo usual inicia a soma pela coluna das unidades?

Problema 3.2.4.8. Em um antigo manuscrito hindu lê-se o seguinte:

soma das unidades:	2	5	2	3	8	0	0	2 0
soma das dezenas:			3	9	1	1	0	1 4
soma das centenas:				1	0	0	1	2
soma das somas:								3 6 0

Quais números foram somados? Como foi feita a soma?

Problema 3.2.4.9. Um arqueólogo viu num estranho manuscrito um conjunto de símbolos que interpretou como

ßßßßI + ßßß = ßßßßßßßI

O que poderia ser isso?

Problema 3.2.4.10. Em um manuscrito do tempo de Bhaskara foi encontrado o seguinte cálculo. Decifre.

$$\begin{array}{r} 5\,4\,2\,0\,7\,1 \\ 4\,6\,9\,8\,9\,2 \\ 5\,2\,7\,7 \\ 7\,3\,0\,8\,5 \\ \hline 1\,0\,9\,0\,3\,2\,5 \\ \hline 1\,2\,1\,3\,1 \end{array}$$

Problema 3.2.4.11. Faça o cálculo abaixo da esquerda para a direita. Qual é o resultado? Esse método é mais fácil que o usual, em que se procede da direita para a esquerda?

$$\begin{array}{r} 6\,5\,8\,9\,1 \\ +\,2\,3\,4\,7\,9 \\ 1\,1\,6\,9\,0 \\ \hline \end{array}$$

Problema 3.2.4.12. Efetue de várias maneiras diferentes:

$$(254)_{sete} + (103)_{sete}$$

$$(2344)_{sete} + (5642)_{sete}$$

$$(40563)_{sete} + (6301)_{sete} + (56314)_{sete}$$

Faça os cálculos também em um ábaco.

Problema 3.2.4.13. Observe as propriedades de simetria e regularidade em uma tábua de adição. Utilizando essas propriedades construa as tábuas de adição nas bases cinco, oito e doze. Efetue nas bases indicadas:

$$(4021)_{cinco} + (2321)_{cinco}$$

$$(76032)_{oito} + (54021)_{oito}$$

$$(9A305)_{doze} + (6AB56)_{doze}$$

Problema 3.2.4.14. Construa a tábua de adição da base dois. Confira o seguinte cálculo nessa base:

$$\begin{array}{lr} & 110\;000\;100\;111\;101\;110 \\ + & 1\;011\;100\;000\;000\;101 \\ \hline & 111\;100\;000\;111\;110\;011 \end{array}$$

Problema 3.2.4.15. Na Ciência da Computação a base dois é extensamente utilizada, e é muito importante construir algoritmos compactos que permitam dispender menos tempo e memória. Vejamos um esboço de uma ideia que tem esse objetivo.

Para efetuar a adição de dois números (no sistema binário) o algoritmo deve incluir as seguintes regras:

(i) $0+0=0$

(ii) $0+1=1$

(iii) $1+0=1$

(iv) $1+1=0$, *e coloca-se zero nas colunas seguintes, à esquerda, até encontrar uma coluna do tipo* $0+0$, *quando então se coloca 1.*

Explique as regras e confira com o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r} 110\ 000\ 100\ 111\ 101\ 110 \\ 1\ 011\ 100\ 000\ 000\ 101 \\ \hline 111\ 100\ 000\ 111\ 110\ 011 \end{array}$$

3.3 A subtração

A subtração é inversa da adição. Enquanto a adição está relacionada com os conceitos de *acrescentar* e *juntar*, a subtração corresponde a *retirar* e *completar*.

3.3.1 Conceito de subtração

Conforme já vimos, o *antecessor* de um número natural a é o número natural cujo sucessor é a. Por exemplo, o antecessor de 2 é 1, de 3 é 2, de 4 é 3, e assim por diante.

Indicamos o antecessor de a por $a-1$ (lê-se: a menos um). Portanto, obtemos o antecessor de um número retirando uma de suas unidades.

A ação "tomar o antecessor de um número natural" é inversa da ação "tomar o sucessor de um número natural".

Se a e b são dois números naturais tais que a tem mais unidades do que b, podemos *subtrair* b *de* a retirando de a tantas unidades quantas as que são de b.

Por exemplo, para subtrair cinco de doze, consideramos as unidades de doze

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

das quais retiramos cinco, e ficamos com

$$1+1+1+1+1+1+1$$

que é sete. Portanto, subtraindo-se cinco de doze, resulta sete. Representamos esse fato com a notação

$$12-5=7$$

Mais geralmente, o resultado de subtrair b de a é indicado por $a-b$ (lê-se: a menos b), e é chamado *diferença* entre a e b.

Fica assim determinada a *operação de subtração*. Deixamos claro também que a subtração é inversa da adição. Isto significa que se subtrairmos b de a e depois, ao resultado, adicionarmos b, obtemos novamente a. Em outros termos,

$$(a - b) + b = a$$

Do mesmo modo, se adicionarmos a e b, e da soma subtrairmos b, o resultado é a:

$$(a + b) - b = a$$

Observamos que, para subtrair, necessitamos de apenas uma habilidade matemática: saber contar.

A subtração pode ser estudada também através de sua relação com o conceito de completar. Se temos uma cesta com 12 bolinhas e outra com cinco bolinhas, queremos saber quantas bolinhas devemos acrescentar na segunda cesta para que a quantidade de bolinhas fique igual à da primeira.

Com essa ideia as crianças fazem subtrações usando os dedos das mãos. Para calcular $12 - 5$ contam "seis", e abaixam um dedo, "sete", e abaixam outro dedo, a assim por diante, até chegar a doze. Os dedos abaixados perfazem sete, e desse modo $12 - 5 = 7$.

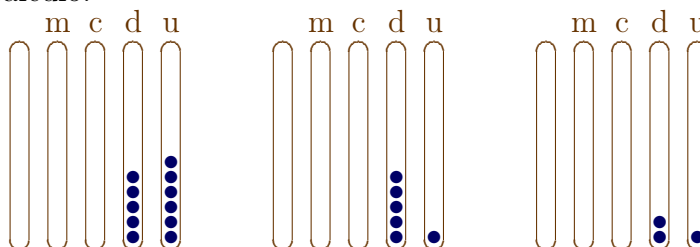
Dessa forma, dados números naturais a e b tais que a tem mais unidades do que b, a diferença $a - b$ é o número natural que somado com b resulta a, ou seja, temos novamente

$$b + (a - b) = a$$

3.3.2 Algoritmos para a subtração

Vimos que para fazer a diferença entre números naturais basta saber contar, e demos um exemplo calculando $12 - 5$. Mas esse método é inviável para números grandes, por exemplo, para calcular $358 - 297$. Devido a isso necessitamos de algoritmos compactos e rápidos, adaptados ao uso da linguagem escrita.

Os algoritmos para implementação da subtração em sistemas posicionais tiveram sua gênese na manipulação do ábaco. Para subtrair dois números naturais em um ábaco é suficiente realizar os movimentos opostos àqueles que são feitos na adição.

Vejamos dois exemplos. No primeiro fazemos $56 - 35$. A figura abaixo representa três movimentos desse cálculo.

Nesta figura, no ábaco da esquerda, vemos representado o número 56. No ábaco do meio vemos que da primeira casa foram retiradas 5 pedrinhas, e restou uma, correspondendo ao cálculo $6 - 5 = 1$, realizado na casa das unidades. No ábaco da direita vemos que foram retiradas 3 pedrinhas da segunda casa, correspondendo ao cálculo $5 - 3 = 2$, realizado na casa das dezenas. O resultado é $56 - 35 = 21$.

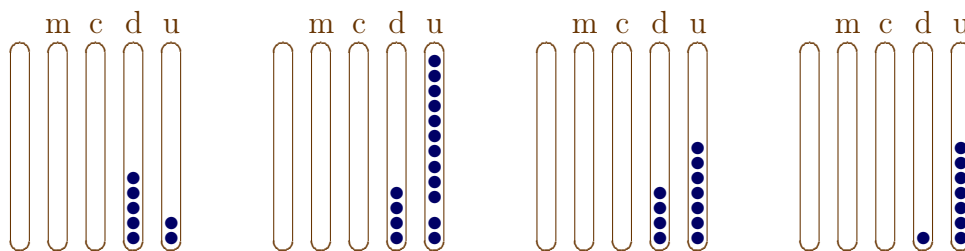
Na linguagem escrita esses movimentos podem ser indicados por

$$\begin{array}{r} 5\,6\\ -\,3\,5\\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5\,6\\ -\,3\,5\\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5\,6\\ -\,3\,5\\ \hline 2\,1 \end{array}$$

Podemos sintetizar na forma usual

$$\begin{array}{r} 5\,6\\ -\,3\,5\\ \hline 2\,1 \end{array}$$

O exemplo abaixo, em que fazemos $52 - 35$, é mais significativo, pois surge uma situação de *empréstimo*. Embora 52 tenha mais unidades do que 35, na casa das unidades ocorre o contrário.

A figura abaixo representa quatro movimentos desse cálculo. No ábaco da esquerda está representado o número 52. No segundo ábaco vemos o empréstimo: uma pedrinha da casa das dezenas de 52 é emprestada para a casa das unidades, transformando-se em 10 pedrinhas. Portanto a casa das unidades fica com 12 pedrinhas, e a casa das dezenas com quatro. No terceiro ábaco vemos o cálculo $12 - 5 = 7$ feito na primeira casa. Finalmente no quarto ábaco vemos $4 - 3 = 1$ feito na segunda casa. O resultado é $52 - 35 = 17$.

Na linguagem escrita esses movimentos podem ser indicados por

$$\begin{array}{r} 5\,2\\ -\,3\,5\\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 4 & (12)\\ -\,3 & 5\\ \hline & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 4 & (12)\\ -\,3 & 5\\ \hline & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 4 & (12)\\ -\,3 & 5\\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

Podemos sintetizar na seguinte forma:

$$\begin{array}{rr} \overset{4}{\not{5}} & {}^{1}2\\ -3 & 5\\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

Uma variação desse método usa o recurso da *compensação*:

$$\begin{array}{r} 5\,2\\ -\,3\,5\\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 5 & (12)\\ -\,4 & 5\\ \hline & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 5 & (12)\\ -\,4 & 5\\ \hline & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 5 & (12)\\ -\,4 & 5\\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

Observamos que as subtrações feitas em uma coluna, como $12-5 = 7$, podem ser calculadas "contando-se nos dedos", como fazem as crianças. Esse é o método da *complementação*, às vezes também denominado *método austríaco*. Pode-se também calcular: $10-5 = 5$, $5+2 = 7$. Outra forma é utilizar a tábua de adição do sistema decimal, que em geral é memorizada.

Na operação de subtração se usa a seguinte nomenclatura:

$$\begin{array}{rl} 7 & \longleftarrow \text{ minuendo} \\ -5 & \longleftarrow \text{ subtraendo} \\ \hline 2 & \longleftarrow \text{ diferença ou resto.} \end{array}$$

A subtração pode ser feita da esquerda para a direita, de acordo com os exemplos que seguem. No segundo dispositivo abaixo, a diferença é colocada acima do minuendo, um antigo costume hindu.

$$\begin{array}{r} 4\,2\,5 \\ -2\,4\,9 \\ \hline \not{2}\,\not{8}\,6 \\ 1\,7\;\; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 1\,7 \\ \not{2}\,\not{8}\,6 \\ 4\,2\,5 \\ 2\,4\,9 \end{array}$$

O resultado dessas subtrações é 176.

Os hindus também usavam outra forma. Veja abaixo como era feito $43826 - 5349 = 38477$. O minuendo era escrito abaixo do subtraendo.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 4 & 7 & 7 \end{array}$$

Os estudantes vivem inventando métodos de subtração que evitam o uso do empréstimo. Eis um exemplo esperto:

$$\begin{array}{rl} 4\,3 & (+2) \\ -2\,8 & (+2) \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 4\,5 \\ -3\,0 \\ \hline 1\,5 \end{array}$$

Outro exemplo, ainda mais esperto:

$$\begin{array}{r} 6\,2\,7 \\ -3\,7\,8 \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 6\,2\,9 \\ -3\,8\,0 \\ \hline 9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 6\,4\,9 \\ -4\,0\,0 \\ \hline 2\,4\,9 \end{array}$$

O método abaixo permite fazer subtrações usando quase que apenas adições. Para calcular $719 - 281$ observamos que este é o número que, adicionado a 281, resulta 719. Assim

$$\begin{array}{rcrcl} 281 & + & 9 & = & 290 \\ 290 & + & 10 & = & 300 \\ 300 & + & 400 & = & 700 \\ 700 & + & \underline{19} & = & 719 \\ & & 438 & & \end{array} \qquad \text{Resposta: } 719 - 281 = 438$$

Outro método. Para calcular $719 - 281$ observamos que este é o número que, subtraído de 719, resulta 281. Assim

$$\begin{array}{rcl} 719 - & 9 = & 710 \\ 710 - & 10 = & 700 \\ 700 - & 400 = & 300 \\ 300 - & 10 = & 290 \\ 290 - & \underline{9} = & 281 \\ & 438 & \end{array} \qquad \text{Resposta: } 719 - 281 = 438$$

Podemos facilmente fazer contas de subtração em um sistema posicional de base qualquer usando o algoritmo usual. Por exemplo, de posse da tábua de adição na base cinco,

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

podemos calcular $423 - 242$ nessa base:

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 3 \\ -\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 1 \end{array}$$

3.3.3 Problemas

Problema 3.3.3.1. Efetue DCCXLIX−CCLXXIII no sistema romano.

Problema 3.3.3.2. Veja se é legal:

$$\begin{array}{r} 323 \\ -139 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 320 \\ -136 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 220 \\ -36 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 200 \\ -16 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 190 \\ -\ 6 \\ \hline 184 \end{array}$$

Problema 3.3.3.3. Efetue na base indicada:

$$(450521)_{seis} - (354045)_{seis}$$

$$(63102)_{sete} - (4256)_{sete}$$

$$(73012)_{oito} - (10663)_{oito}$$

$$(1011100)_{dois} - (100111)_{dois}$$

Problema 3.3.3.4. Efetue $(6035)_{oito} - (5276)_{oito}$ usando o algoritmo usual, mas iniciando da coluna da esquerda.

Problema 3.3.3.5. Descreva uma "regra do antecessor" para o sistema decimal, de forma análoga à regra do sucessor descrita no texto (página 26). Faça o mesmo para um sistema posicional qualquer.

Problema 3.3.3.6. Encontre a representação binária dos números $2^{n-1}(2^n - 1)$ para todo número natural n.

Problema 3.3.3.7. Eis um método de subtração que é utilizado em máquinas mecânicas de calcular. Uma máquina de calcular lida com uma quantidade finita de números, e tem um número máximo, digamos 9999. Dessa forma, a máquina conta de 0000 a 9999, e o número seguinte é novamente 0000. Dado um número natural a, o complemento de a é o número $c(a) = 10000 - a$, isto é, é o número que falta para que, a partir de a, o mostrador mecânico da máquina atinja a marca 0000. O mecanismo da máquina "sabe" o complemento de qualquer número. A subtração é então reduzida à adição:

$$a - b = c(b + c(a))$$

Verifique essa fórmula.

Problema 3.3.3.8. Um estudante inventou seu próprio método de efetuar a subtração. Eis um exemplo:

$$\begin{array}{r} 5\,4 \\ -2\,6 \\ \hline \end{array}$$

1) Faça $6 - 4 = 2$;
2) Faça $50 - 20 = 30$;
3) O resto procurado é $30 - 2 = 28$.

a) Explique em que circunstâncias e por que funciona o método do estudante.

b) Tente imaginar por que o estudante teria inventado esse método, o que ele facilita em relação ao método usual.

c) Quais são as desvantagens desse método em relação ao método usual, e por qual motivo esse método não é ensinado nas escolas no lugar do método usual.

Problema 3.3.3.9. Ao efetuar $4738 - 3912$, um estudante fez o seguinte. Primeiro substituiu cada dígito do subtraendo pelo seu complemento relativamente a nove, obtendo o número 6087. Depois adicionou 4738 ao número assim obtido, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 4\,7\,3\,8 \\ +\,6\,0\,8\,7 \\ \hline \not{1}\,0\,8\,2\,5 \\ \hookrightarrow \quad +1 \\ \hline 8\,2\,6 \end{array}$$

Então, concluiu, $4738 - 3912 = 826$.

a) Explique por que esse método funciona com números com a mesma quantidade de dígitos. Investigue se este método funciona quaisquer que sejam os números envolvidos.

b) Efetue na base dois, usando o mesmo método:

$$(1\,011\,001)_{dois} - (110\,111)_{dois}$$

c) Efetue na base oito:

$$(73265)_{oito} - (32156)_{oito}$$

3.4 Ordenação dos números naturais

Vimos que existe uma ordem natural no conjunto dos números naturais. Assim, dados números naturais a e b, podemos compará-los e verificar se têm a mesma quantidade de unidades, ou se um deles tem uma quantidade maior do que a do outro.

Escrevemos $a = b$ para indicar que os números naturais têm a mesma quantidade de unidades. Neste caso dizemos *a igual a b*.

Se a tem mais unidades do que b, escrevemos $b < a$, ou $a > b$, e dizemos *b menor do que a*, ou, respectivamente, *a maior do que b*.

No conjunto dos números naturais vale a *propriedade transitiva*: se a, b e c são números naturais tais que $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. De fato, se a tem menos unidades do que b e se este tem menos unidades do que c, então a tem menos unidades do que c. Vale também a *Lei da Tricotomia*: dados os números naturais a e b, uma e apenas uma das seguintes condições é verdadeira: *i)* $a = b$; *ii)* $a < b$; *iii)* $a > b$. De fato, dados os números a e b, eles têm a mesma quantidade de unidades, ou um deles tem maior quantidade que a do outro.

São muito úteis as seguintes notações. Sejam a e b números naturais. Anotamos $a \leq b$ quando $a = b$ ou $a < b$. Da mesma forma, anotamos $a \geq b$ quando $a = b$ ou $a > b$.

Destacamos a seguinte propriedade, por ser muito útil: se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento. Isto significa que existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo b em A.

Observamos as seguintes propriedades de compatibilidade entre a ordem dos números naturais e as operações aritméticas.

compatibilidade entre a ordem e a adição: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

De fato, se b tem mais unidades do que a, e se adicionarmos a cada um a mesma quantidade c de unidades, então $b + c$ tem mais unidades do que $a + c$.

Esta propriedade implica a seguinte: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$. De fato, sendo $a \leq b$, temos dois casos a examinar: $a = b$ ou $a < b$. Se $a = b$ então $a + c = b + c$, pois estamos somando c ao mesmo número. Se $a < b$, temos $a + c < b + c$, em virtude da propriedade da compatibilidade entre a ordem e a adição. Em qualquer caso temos $a + c \leq b + c$.

Vejamos agora que quaisquer que sejam os números naturais a, b, c e d, se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$. Para deduzir esse fato aplicamos a propriedade anterior duas vezes. De $a \leq b$ vem $a + c \leq b + c$. De $c \leq d$ vem $c + b \leq d + b$. Em virtude da transitividade da ordem segue que $a + c \leq b + d$.

Estudaremos a multiplicação na Seção 3.5, mas podemos adiantar a seguinte propriedade.

Sejam a e b números naturais tais que $a \leq b$. Aplicando a propriedade anterior a $a \leq b$ e a $a \leq b$ vem $a + a \leq b + b$, ou $2a \leq 2b$. Juntando esta última com $a \leq b$ vem $2a + a \leq 2b + b$, ou $3a \leq 3b$. E assim sucessivamente, se $a \leq b$ então $na \leq nb$ qualquer que seja o número natural n. Da mesma forma podemos ver que se $a < b$ então $na < nb$ qualquer que seja o número natural n. Assim obtemos a

compatibilidade entre a ordem e a multiplicação: quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $a < b$ então $an < bn$. Ou, se $a \leq b$ então $an \leq bn$.

Problema resolvido 3.1. (*Lei de Cancelamento*) Quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $na < nb$ então $a < b$.

Solução. Sobre os números a e b podemos afirmar que $a = b$ ou $a > b$ ou $a < b$. Se fosse $a = b$ teríamos $na = nb$, o que não é o caso. Se fosse $a > b$ teríamos, pela compatibilidade entre a ordem e a multiplicação, demonstrada acima, que $na > nb$, o que também não é o caso. Resta a possibilidade $a < b$, que é a que queríamos. □

3.4.1 Problemas

Problema 3.4.1.1. Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo, e justifique. **a)** $2 \leq 3$. **b)** se a, b e c são números naturais tais que $a \leq b$ e $b < c$, então $a < c$. **c)** se a, b e c são números naturais tais que $a < b$ e $b \leq c$, então $a < c$. **d)** se a, b e c são números naturais tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a < c$.

Problema 3.4.1.2. Qual é a negativa das seguintes afirmações, em que a, b, c e d são números naturais: **a)** $a \leq b$; **b)** $c > d$.

Problema 3.4.1.3. (Lei do Cancelamento da Adição) Sejam a, b e c números naturais tais que $a + c = b + c$. Prove que $a = b$.

Problema 3.4.1.4. Sejam a, b e c números naturais tais que $a + c < b + c$. Prove que $a < b$.

Problema 3.4.1.5. Demonstre que $a + 1 \leq b$ se e somente se $a < b$, quaisquer que sejam os números naturais a e b. Prove também que $a + 1 > b$ se e somente se $a \geq b$.

Problema 3.4.1.6. Demonstre que, quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos $b < a$ se e somente se existe um número natural c tal que $a = b + c$.

Problema 3.4.1.7. Demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $a - b = c$, então $c < a$ e $a - c = b$. Temos ainda $a = b + c$.

Problema 3.4.1.8. Vale a compatibilidade da ordem em relação à subtração? Enuncie corretamente a propriedade. Se vale, justifique. Se não vale, dê um contra-exemplo.

Problema 3.4.1.9. Demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $b < a$, então

$$(a + c) - (b + c) = a - b$$

Problema 3.4.1.10. Demonstre que se $a = (a_m \ldots a_1 a_0)_\beta$ e $b = (b_n \ldots b_1 b_0)_\beta$ são números naturais representados na base $\beta \geq 2$, com $m > n$, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$, então $a > b$.

Problema 3.4.1.11. Sejam $a = (a_m \ldots a_1 a_0)_\beta$ e $b = (b_m \ldots b_1 b_0)_\beta$ números naturais representados na base $\beta \geq 2$. Descreva condições suficientes sobre os dígitos de a e b para que $a > b$.

3.5 A multiplicação

A multiplicação é um caso especial da adição, em que são somadas parcelas iguais. O estudo em separado deste caso de adição nos permite potencializar seu uso.

3.5.1 Conceito de multiplicação

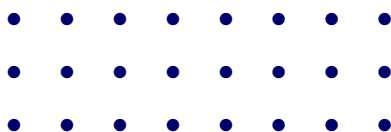
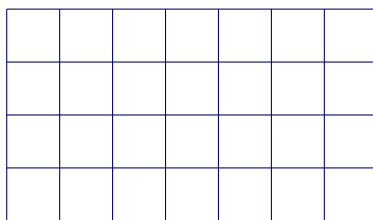
Duplicar um número natural significa adicionar duas parcelas iguais a este número. Assim, o *dobro* de a é $a + a$. *Triplicar* um número significa adicionar três parcelas iguais a este número: $a + a + a$. E assim temos *quadruplicar*, *quintuplicar*, em geral, *multiplicar*.

Multiplicar um número natural a por um número natural n significa adicionar n parcelas iguais a a. O resultado se chama *produto de a por n.* O produto de a por n é indicado com uma das seguintes notações:

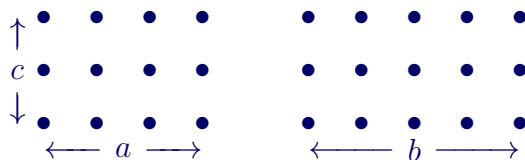
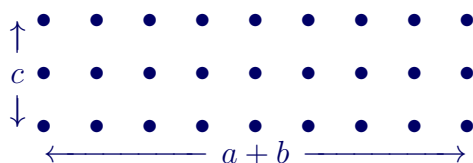
$$na \qquad n \cdot a \qquad \text{ou} \qquad n \times a$$

(lê-se: n vezes a, ou n multiplicado por a).

A multiplicação ocorre em inúmeras situações como contagem de objetos colocados em um arranjo retangular ou no cálculo da medida da área de um retângulo de base a e altura b, sendo a e b números naturais, por contagem de quadrados unitários.

Para contar os pontos da figura abaixo basta calcular $3 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 = 24$, ou $8 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$.

Por outro lado, para calcular a área do retângulo de medidas 7 e 4, o subdividimos em quadrados de lado 1, e os contamos. Para isso fazemos o produto $4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$, ou $7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$.

Observamos assim que a contagem de objetos em um arranjo retangular pode ser feita de duas maneiras, primeiro tomando a quantidade de linhas e multiplicando-a pela quantidade de colunas, ou o contrário. Naturalmente o resultado é o mesmo. Essas situações fazem parte de experiências que contribuem para que as pessoas construam psicologicamente a *propriedade comutativa da multiplicação*. Sua formulação algébrica é

$$ab = ba \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a \text{ e } b.$$

Dados números naturais a, b e c, consideremos dois arranjos retangulares, como na figura a seguir, o primeiro com a colunas, o segundo com b colunas, e ambos com c linhas. O primeiro tem ac elementos, o segundo, bc, e juntos perfazem $ac + bc$ elementos.

Juntando agora os dois arranjos para formar um único retângulo, contamos $(a+b)c$ elementos.

Novamente a quantidade de elementos contados em ambas as situações é a mesma. Temos

assim a *propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*:

$$(a+b)c = ac + bc \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a \text{ e } b.$$

Sejam a, b e c números naturais quaisquer. Consideremos um arranjo de abc objetos em forma de paralelepípedo, com dimensões a, b e c. Podemos contar os objetos desse arranjo de várias formas, começando com uma das faces (multiplicando as dimensões da face) e depois multiplicando pela altura relativa a essa face. Por exemplo, $(ab)c$, ou $a(bc)$. Naturalmente o resultado é o mesmo. Temos assim a *propriedade associativa da multiplicação*:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a,\ b \text{ e } c.$$

A multiplicação de valores repetidos chama-se *potenciação* e tem uma notação especial, já conhecida do estudante:

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n \quad a \text{ multiplicado por ele mesmo } n \text{ vezes}$$

3.5.2 Algoritmos para a multiplicação

O método mais básico que podemos usar para multiplicar dois números consiste em aplicar a definição. Assim, para calcular 5×12 basta fazer a adição $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$.

Certamente que não gostaríamos de utilizar esse método para números maiores, por exemplo, 35×273. Para aplicar a multiplicação nas mais variadas situações necessitamos de um algoritmo que traga economia de tempo e esforço, e seja adaptado para uso em linguagem escrita. Esse é sem dúvida o algoritmo usual, que aprendemos nas escolas. Vejamos a gênese desse algoritmo.

Começamos observando, como uma ideia inicial, que para calcular 35×273 não necessitamos somar $273 + \ldots + 273$ (35 vezes). De fato, $273 + 273 = 546$, e não necessitamos mais repetir essa soma. Podemos mesmo aproveitá-la, fazendo $546 + 546 = 1092$, de forma que $4 \times 273 = 1092$. Agora $1092 + 1092 = 2184$ nos fornece $8 \times 273 = 2184$. E assim por diante, obtemos $16 \times 273 = 4368$ e $32 \times 273 = 8736$. Como $35 = 32 + 2 + 1$, temos $35 \times 273 = 32 \times 273 + 2 \times 273 + 273 = 8736 + 546 + 273 = 9555$.

Vimos que conseguimos economizar um bocado de contas. Mas podemos economizar mais. A ideia acima usa a duplicação. Mas, como estamos representando os números no sistema decimal, certamente será melhor usarmos a decuplicação. Observamos que o efeito de multiplicar um número por 10 é o deslocamento de seus dígitos uma casa acima. Assim, $10 \times 273 = 2730$, e o dígito 3, que estava na primeira casa, vai para a segunda, o dígito 7, que estava na segunda casa, vai para a terceira, e assim por diante.

Isto ocorre visto que

$$\begin{aligned} 10 \times 273 &= 10 \times (2 \times 10^2 + 7 \times 10 + 3) \\ &= 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10 \\ &= 2730 \end{aligned}$$

Em geral, quando multiplicamos por 10^n o número $a = a_m 10^m + \ldots a_1 10 + a_0$, cada dígito a_i é deslocado n casas para a esquerda, e as primeiras n casas de $10^n a$ são ocupadas por zeros.

Essa observação pode ser usada para o cálculo de 35×273. Notando que $35 = 3 \times 10 + 5$, temos $35 \times 273 = (3 \times 10 + 5)273 = 3 \times 10 \times 273 + 5 \times 273 = 3 \times 2730 + 5 \times 273$. Para completar fazemos agora os cálculos $3 \times 2730 = 2730 + 2730 + 2730 = 8190$ e $5 \times 273 = 1365$, e temos $35 \times 273 = 8190 + 1365 = 9555$.

Observando esses cálculos vemos que necessitamos de um método melhor para multiplicar um número natural qualquer por um número de um dígito.

Por exemplo, precisamos descobrir um método de sintetizar o cálculo

$$\begin{array}{r} \overset{3}{2}\,\overset{1}{7}\,3 \\ 2\,7\,3 \\ +\ 2\,7\,3 \\ 2\,7\,3 \\ 2\,7\,3 \\ \hline 1\,3\,6\,5 \end{array}$$

Inicialmente observamos que não há necessidade de repetir 273. Basta escrevê-lo uma vez. Embaixo dele colocamos 5 para lembrar que estamos multiplicando por 5.

$$\begin{array}{r} 2\,7\,3 \\ \times\quad 5 \\ \hline \end{array}$$

A seguir implementamos o cálculo como se estivéssemos fazendo a soma acima. Tomamos o dígito 3 de 273 e calculamos $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$. Escrevemos 5 na primeira coluna e reservamos 1 na coluna seguinte. E assim sucessivamente, obtemos $5 \times 273 = 1365$.

$$\begin{array}{r} \overset{3}{2}\,\overset{1}{7}\,3 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1\,3\,6\,5 \end{array}$$

Nesse estágio de nosso estudo percebemos como é importante termos na memória os produtos de dois algarismos quaisquer. Por isso é que nossos professores das séries iniciais sempre insistiram em que memorizássemos a tabuada da multiplicação.

Temos agora todos os ingredientes para implementar 35×273 de forma sintética. Podemos acompanhar abaixo os passos principais.

$$\begin{array}{r} 2\,7\,3 \\ \times\quad 3\,5 \\ \hline \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \overset{3}{2}\,\overset{1}{7}\,3 \\ \times\quad 3\,5 \\ \hline 1\,3\,6\,5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \overset{\overset{2}{3}}{2}\,\overset{1}{7}\,3 \\ \times\quad 3\,5 \\ \hline 1\,3\,6\,5 \\ 8\,1\,9\,0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \overset{\overset{2}{3}}{2}\,\overset{1}{7}\,3 \\ \times\quad 3\,5 \\ \hline 1\,3\,6\,5 \\ +\ 8\,1\,9\,0 \\ \hline 9\,5\,5\,5 \end{array}$$

Podemos reconhecer nesses cálculos um dispositivo prático para implementar o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} 35 \times 273 &= (3 \times 10 + 5)273 \\ &= 3 \times 273 \times 10 + 5 \times 273 \\ &= 8\,190 + 1\,365 \\ &= 9\,555 \end{aligned}$$

Com a prática omitimos as reservas assim como os zeros originados de deslocamentos. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 2 & 3 \\
 & \times 3 & 4 & 5 & \\
\hline
 & & 6 & 1 & 5 \\
 & 4 & 9 & 2 & \\
3 & 6 & 9 & & \\
\hline
4 & 2 & 4 & 3 & 5
\end{array}$$

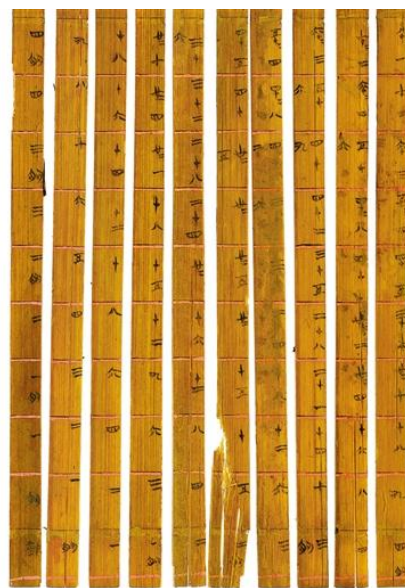
Pensamos que estes exemplos esclarecem a gênese do algoritmo usual da multiplicação.

Na multiplicação usamos a seguinte nomenclatura:

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\, 5 \\ \hline 1\ 5 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{fatores} \\ \\ \longrightarrow \text{produto} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \times\, 5 \\ \hline 1\ 5 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{multiplicando} \\ \longrightarrow \text{multiplicador} \\ \longrightarrow \text{produto} \end{array}$$

Pode ter interesse pedagógico o chamado *método longo*, conforme o exemplo seguinte.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 7 & 6 \\
 & & \times 3 & 9 \\
\hline
 & & 5 & 4 \\
 & 6 & 3 & \\
 & 1 & 8 & \\
2 & 1 & & \\
\hline
2 & 9 & 6 & 4
\end{array}$$

Figura 3.2. Antiga tábua de multiplicação chinesa feita com tiras de bambu, datada de 446-221 a. C. Faz parte do acervo da Universidade de Tsinghua. Acredita-se que seja o mais antigo artefato conhecido para o cálculo da multiplicação. Mais informações em `https://en.wikipedia.org/wiki/Tsinghua_Bamboo_Slips` Consultado em 26 de setembro de 2016.

O algoritmo de multiplicação comumente usado no sistema decimal é válido para qualquer sistema posicional.

Vejamos alguns exemplos na base cinco. Para maior comodidade tenhamos à mão a tábua de multiplicação nesta base.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Vejamos agora os exemplos.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1\ 4 \\ \times \quad\ \ 4 \\ \hline 3\ 1 \\ 4\ \ \\ 1\ 3\ \ \ \ \\ 2\ 2\ \ \ \ \ \ \\ \hline 2\ 3\ 4\ 2\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{3}\ \overset{1}{2}\ \overset{3}{1}\ 4 \\ \times \quad\ \ 4 \\ \hline 2\ 3\ 4\ 2\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 4\ 1 \\ \times\, 2\ 3 \\ \hline 2\ 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ \ \\ \hline 1\ 4\ 4\ 4\ 3 \end{array}$$

O antigo método de multiplicação egípcio tem interesse histórico. Utiliza o método da duplicação, já comentado no início desta seção. Não depende do sistema de numeração, e pode ser aplicado a sistemas não posicionais. Devido a esse fato foi muito utilizado no mundo antigo.

Vamos exemplificar multiplicando 6 por 13. Começamos dispondo duas colunas. Na primeira colocamos potências de dois: 1, 2, 4, 8, etc., de modo que o último número não ultrapasse o valor de um dos fatores, previamente escolhido. Assim, escolhendo o fator 13, o último número da primeira coluna deve ser 8. Na segunda coluna, dispomos o outro fator, no caso 6, e o duplicamos sucessivamente, conforme se mostra abaixo, à esquerda.

1	6
2	12
4	24
8	48

*	1	6
	2	12
*	4	24
*	8	48
Totais	13	78

À direita, acima, podemos ver como se finaliza o cálculo. Usando tentativa e erro observamos que $13 = 1 + 4 + 8$ (esta é a decomposição de 13 em potências de 2). Assinalamos com * as linhas que correspondem aos números 1, 4 e 8. Somamos os números da segunda coluna que constam das linhas assinaladas: $6 + 24 + 48 = 78$. Este é o produto procurado.

Para justificar o método egípcio consideremos números naturais a e b. Seja

$$a = 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0$$

a expansão de a no sistema binário. Notemos que 2^n é a maior potência de 2 que não ultrapassa a, e os coeficientes a_i podem ser 1 ou 0. Se $a_i = 1$, então a potência 2^i comparece na expansão binária de a. Se $a_i = 0$, a potência 2^i não comparece. Vejamos agora que

$$a \cdot b = (2^n b) + a_{n-1}(2^{n-1}b) + \cdots + a_1(2b) + a_0(b)$$

e os termos que aí comparecem são aqueles que correspondem aos termos $a_i \neq 0$. Estes termos são aqueles cujas linhas são assinaladas por * na seguinte disposição:

$$
\begin{array}{cc}
1 & b \\
2 & 2b \\
4 & 4b \\
\vdots & \vdots \\
2^n & 2^n b \\
\hline
a & a \cdot b
\end{array}
$$

Com isto terminamos a justificativa do método egípcio de multiplicação.

Diversos dispositivos de multiplicação para o sistema decimal foram desenvolvidos pelos hindus, e são descritos em obras como *Lilavati*, escrita por Bhaskara por volta do ano de 1150. Estes métodos foram adotados em diversas obras européias sobre aritmética, no Século XV.

Vamos apresentar brevemente alguns destes dispositivos, através de exemplos. Outros métodos são propostos como problemas, logo abaixo.

Cálculo de $13 \cdot 217$;
o resultado é 2821.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 2 & 1 & 7 \\
\times & 1 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & 6 & & \\
 & & 1 & 3 & \\
 & & & 9 & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & 2 & 1
\end{array}
$$

Variação do método anterior.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 2 & 1 & 7 \\
\times & 1 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & 1 & 7 & \\
 & & 6 & 5 & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & 2 & 1
\end{array}
$$

Cálculo de $35 \cdot 46$;
o resultado é 1610.

3.5.3 Problemas

Problema 3.5.3.1. Observe as propriedades de simetria e regularidade em uma tábua de multiplicação. Utilizando essas propriedades construa as tábuas de multiplicação nas bases dois, quatro e sete. Efetue nas bases indicadas usando o algoritmo usual:

$$(1001)_{dois} \times (101)_{dois}$$

$$(1110011)_{dois} \times (10001101)_{dois}$$

$$(23103)_{quatro} \times (32)_{quatro}$$

$$(1030223)_{quatro} \times (323)_{quatro}$$
$$(4500613)_{sete} \times (302)_{sete}$$

Problema 3.5.3.2. Considerando o algoritmo usual de multiplicação, compare os métodos curto e longo, descrevendo as vantagens e desvantagens de um sobre o outro.

Problema 3.5.3.3. Se você vivesse na Roma antiga e não conhecesse nenhum sistema de numeração posicional, como calcularia o produto de XXIII por LVII? Como essa tarefa o ajuda na comparação entre os sistemas aditivos e os posicionais?

Problema 3.5.3.4. Um estudante calculou 245×12 assim:

$$\begin{array}{r} \overset{5}{2}\ \overset{6}{4}\ 5 \\ \times\ 1\ 2 \\ \hline 2\ 9\ 4\ 0 \end{array}$$

Como foi feito esse cálculo? Faça outros exemplos. O que é diferente aqui em relação ao algoritmo usual?

Problema 3.5.3.5. Um antigo método de multiplicar, denominado *método camponês russo*, pode ser exemplificado com o cálculo do produto $25 \cdot 31$:

$$\begin{array}{rr} *25 & 31 \\ 12 & 62 \\ 6 & 124 \\ *\,3 & 248 \\ *\,1 & \underline{496} \\ & 775 \end{array}$$

Desta disposição se conclui que $25 \cdot 31 = 775$. Faça outros exemplos. Explique e justifique o método.

Problema 3.5.3.6. Estude esse antigo método hindu. Vemos o cálculo de $327 \cdot 536$. O resultado é 175 272.

$$\begin{array}{rl} 3\,2\,7 & \\ \hline 1\,9\,6\,2\ / & 6 \\ 9\,8\,1\ / & 3 \\ 1\,6\,3\,5\ / & 5 \\ \hline 1\,7\,5\,2\,7\,2 & \end{array}$$

Problema 3.5.3.7. Este é o antigo *método do quadrilátero*. Vemos abaixo o cálculo de $327 \cdot 536$. O resultado é 175 272. Como não é feito o deslocamento correspondente às dezenas, centenas, etc., a soma dos produtos parciais é feita em diagonal, da esquerda para a direita e de cima para baixo. Estude esse método.

			3	2	7	
		1	9	6	2	6
			9	8	1	3
		1	6	3	5	5
1	7	5	2	7	2	

Problema 3.5.3.8. Vemos a seguir o produto de $218 \cdot 354$ pelo *método da gelosia*. O resultado é 77172. A soma dos produtos parciais é feita em diagonal. Estude esse método.

	2	1	8	
4	8	4	2 / 3	2
5	0 / 1	5	0 / 4	7
3	6	3	4 / 2	1
		7	7	

Problema 3.5.3.9. Para calcular 43×47 podemos fazer $3 \times 7 = 21$ e $4 \times 5 = 20$ e encadear 21 com 20 obtendo $43 \times 47 = 2021$. O cálculo fica assim:

$$\begin{array}{r} 4\ 7 \\ \times\ 4\ 3 \\ \hline 2\ 0\ 2\ 1 \end{array}$$

Encontre outros exemplos. Explique por que funciona. Veja como aplicar essa ideia para calcular 103×107.

Problema 3.5.3.10. Multiplicando 4 por 2178 encontramos seu reverso 8712. Encontre o número de quatro dígitos que multiplicado por 9 dê o seu reverso. O número que você obteve é o único com essa propriedade?

Problema 3.5.3.11. Demonstre que é um número de Fermat o produto

$$(1\,010\,000\,001)_{dois} \times (11\,001\,100\,011\,110\,110\,000\,001)_{dois}$$

Números de Fermat foram definidos no Problema 2.7.17, na página 37.

3.6 A divisão

A divisão amplia o potencial da subtração, e, de certo modo, é inversa da multiplicação. Foi considerada, até o Século XV, uma operação de difícil uso. O autor Luca Pacioli, em sua obra *Suma*, de 1494, diz que "se uma pessoa sabe dividir, tudo o mais é fácil", e consola o estudante discorrendo sobre os benefícios do trabalho pesado. Hoje a divisão é ensinada para crianças, o que deve ser feito com o cuidado necessário.

3.6.1 Conceito de divisão

A divisão responde basicamente a dois conceitos: repartir e comparar.

A divisão vista como repartir ocorre quando desejamos particionar um conjunto de objetos em grupos com o mesmo número de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de grupos e queremos saber a quantidade máxima de objetos que poderão compor cada grupo.

Por exemplo, consideremos o problema de dividir 25 laranjas para 7 estudantes de modo que todos recebam a mesma quantidade de laranjas inteiras. Desse modo queremos dividir 25 laranjas em sete grupos, e precisamos saber quantas laranjas poderá ter cada grupo, sendo essa quantidade a maior possível. Uma estratégia básica é primeiro entregar uma laranja para

cada estudante. Ficamos com $25 - 7 = 18$ laranjas. Entregamos mais uma laranja para cada estudante, e ficamos com $18 - 7 = 11$ laranjas. Repetimos entregando mais uma laranja para cada um, e ficamos com $11 - 7 = 4$. Com as quatro laranjas que sobraram não é possível repartir mais uma vez, de modo que a divisão termina. Dessa forma dividimos 25 em 7 grupos com 3 laranjas cada grupo, e sobram 4 laranjas.

A divisão vista como comparar ocorre quando temos dois números e os comparamos. Queremos saber quantas vezes, no máximo, um número “cabe” no outro. Dizendo de outra forma, dado um conjunto de objetos, queremos organizá-lo em grupos com a mesma quantidade de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de objetos de cada grupo e queremos saber quantos são os grupos.

Por exemplo, temos 25 laranjas e queremos saber quantos estudantes poderão receber 3 laranjas cada um. Uma estratégia básica consiste em multiplicar 3 por 1, 2, 3,..., até atingir a quantidade máxima que não ultrapassa 25. Temos assim: 1 grupo, $1 \times 3 = 3$ laranjas; dois grupos, $2 \times 3 = 6$ laranjas, e assim por diante, continuamos até chegar a oito grupos, $8 \times 3 = 24$ laranjas. Paramos, pois $25 - 24 = 1$, e 1 não é suficiente para formar outro grupo. Portanto 3 cabe 8 vezes (inteiras) em 25, e sobra 1.

Dado um número natural a, suponhamos que a foi dividido em q grupos com b elementos cada um, e que restaram r elementos. Esse fato é representado pela equação fundamental da *divisão*:

$$a = bq + r \tag{3.1}$$

Um caso especial ocorre se não houver resto. Dizemos então que a divisão é *exata*, e a equação fundamental fica

$$a = bq \tag{3.2}$$

Nas relações (3.1) e (3.2), q é denominado *quociente* e r, *resto* da divisão de a por b.

Considerando-se apenas a relação (3.1) o quociente e o resto da divisão de a por b não são únicos. Por exemplo, ao dividir 19 por 3 temos as possibilidades, dentre outras: $19 = 3 \cdot 6 + 1 = 3 \cdot 5 + 4 = 3 \cdot 4 + 7$. Portanto 6, 5 e 4 são quocientes, e os restos respectivos são 1, 4 e 7. Mas existe o maior quociente, que no exemplo dado é 6 e que corresponde ao menor resto, 1.

Dividir um número natural a por um número natural b tal que $0 < b \leq a$ significa encontrar um quociente q tal que $a = bq$ ou o maior quociente q e o resto r tais que $a = bq + r$. Neste caso temos $r < b$.

De acordo com o que comentamos acima sobre o significado da divisão estamos considerando duas maneiras de calcular q e r.

A primeira é perfazer subtrações sucessivas. Assim, para dividir a por b, com $b < a$, calculamos $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$,... Notemos que os valores $a - qb$, para $q = 1, 2, 3,...$ diminuem à medida que q cresce. Assim existe o maior q tal que a subtração $a - qb$ pode ser feita mas $a - (q + 1)b$ não. Se encontrarmos q tal que $a = qb$, a divisão é exata e terminamos. Caso contrário, chamando $r = a - qb$ temos $a = qb + r$, e a divisão terminou. Para dividir a por b, com $b = a$, basta tomar $q = 1$, e a divisão é exata.

A segunda maneira de dividir a por $b \leq a$ consiste em calcular $1 \cdot b$, $2b$, $3b$,... até atingir o valor a ou ultrapassá-lo. Se o valor a for atingido, significa que encontramos q tal que $a = qb$, e a divisão é exata. Se o valor a não for atingido, seja qb o maior elemento da sequência antes de a, de modo que $qb < a < (q + 1)b$. Chamando $r = a - qb$ temos $a = qb + r$, e a divisão terminou.

Observemos que em ambos os casos r é o menor resto possível. De fato, sejam t e s números naturais tais que $a = tb + s$, e suponhamos que $s < r$. Então $a - tb < a - qb$, o que implica $qb < tb$. Disto segue $q < t$, o que contraria a hipótese de ser q o maior número natural tal que $qb < a$. Portanto $r \leq s$.

Destacamos o seguinte resultado, que pode ser muito útil:

Se $a = bq + r$ com $r < b$, então q é a quantidade de múltiplos de b no conjunto 1, 2, 3, ..., a.

3.6.2 Algoritmos para a divisão

Nesta seção o principal objetivo é estudar a gênese do algoritmo usual de divisão, aquele que é ensinado em nossas escolas. Desse modo poderemos compreender por que o algoritmo atingiu seu formato atual. Pensamos que o melhor jeito de fazer esse estudo é considerar alguns exemplos.

Começamos dividindo 30 por 7 através do método de subtrações sucessivas.

$$\begin{array}{l} 30-7=23 \\ 23-7=16 \\ 16-7=\ 9 \\ 9\ -7=\ 2 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ \underline{-7} \\ 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \underline{-7} \\ 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{-7} \\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \underline{-7} \\ 2 \end{array}$$

Como foram feitas 4 subtrações, então 4 é o quociente. O resto é 2. Assim, $30 = 4 \cdot 7 + 2$.

Podemos facilmente imaginar que o dispositivo acima não seria nada conveniente para dividir números maiores. Dessa forma precisamos encontrar uma forma mais sintética. O dispositivo abaixo, usado para dividir 30 por 7, utiliza o mesmo método de divisões sucessivas, mas adota um formato mais conveniente.

$$\begin{array}{r|l}
3\ 0 & \underline{\ 7\ \quad} \\
\underline{-\ 7} & 1 \\
2\ 3 & \\
\underline{-\ 7} & 1 \\
1\ 6 & \quad + \\
\underline{-\ 7} & 1 \\
9 & \\
\underline{-\ 7} & \underline{1\ \quad} \\
2 & 4
\end{array}$$

Podemos encurtar vendo por exemplo que $3 \times 7 = 21 < 30$, e fazer

$$\begin{array}{r|l}
3\ 0 & \underline{\ 7\ \quad} \\
-\ \underline{2\ 1} & 3 \\
9 & \quad + \\
\underline{-\ 7} & \underline{1\ \quad} \\
2 & 4
\end{array}$$

O melhor mesmo é antecipar que $4 \times 7 = 28 < 30$ fornece o menor resto, e fazer

$$\begin{array}{r|l}
3\ 0 & \underline{\ 7\ \quad} \\
-\ \underline{2\ 8} & 4 \\
2 &
\end{array}$$

Podemos sintetizar esse formato eliminando a subtração e um risco:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 7 \\ \cline{3-3} & 2 & 4 \end{array}$$

Acompanhamos mentalmente esse cálculo assim: $4 \times 7 = 28$, para 30, sobram 2. Como $2 < 7$, terminamos.

Para prosseguir, adotaremos a seguinte nomenclatura para a divisão:

em $a = bq + r$ ou em $\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} \ddots & q \\ r & \end{array}$

temos:

a é o dividendo;
b é o divisor;
q é o quociente, e
r é o resto.

Para aperfeiçoar nosso método vejamos um exemplo com um número um pouco maior.

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 7 & \\ \cline{4-5} - & 7 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{1-3} & 5 & 3 & + & 7 \\ \cline{4-5} - & 4 & 9 & 1 & 7 \\ \cline{1-3} & & 4 & & \end{array}$$

Para dividir 123 por 7 começamos com $10 \times 7 = 70$, e fazemos $123 - 70 = 53$. Observe que não é possível começar com 20×7 ou um número maior. Podemos economizar escrevendo 1 no quociente no lugar de 10. Depois, ao dividir 53 por 7 colocamos o quociente 7 na frente de 1, obtendo 17. Assim evitamos fazer a soma $10 + 7 = 17$ no quociente. Podemos fazer isso devido a que o dígito 1 do quociente 17 é o maior possível. Ficamos com

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 7 & \\ \cline{4-5} - & 7 & 0 & 1 & 7 \\ \cline{1-3} & 5 & 3 & & \\ - & 4 & 9 & & \\ \cline{1-3} & & 4 & & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 7 & \\ \cline{4-5} & 5 & 3 & 1 & 7 \\ & & 4 & & \end{array}$$

Vejamos mais um exemplo com o cálculo de 31709 dividido por 8. O método compacto fica

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 3 & 1 & 7 & 0 & 9 & 8 & & & \\ \cline{6-9} & 7 & 7 & & & 3 & 9 & 6 & 3 \\ & & 5 & 0 & & & & & \\ & & & 2 & 9 & & & & \\ & & & & 5 & & & & \end{array}$$

Para estudar as regras usuais de divisão o estudante pode desenvolver os cálculos com detalhes adicionais, como fazemos a seguir com a divisão anterior.

Primeiro consideramos a decomposição $31709 = 31000 + 709$, e calculamos a divisão de 31

por 8. Da tábua de multiplicação sabemos que $8 \cdot 3 < 31 < 8 \cdot 4$. Logo, o melhor divisor é 3, e o resto $31 - 24 = 7$. Obtemos $31 = 8 \cdot 3 + 7$, donde $31000 = 8 \cdot 3000 + 7000$. Em consequência, a decomposição inicial se transforma em

$$31709 = 8 \cdot 3000 + 7000 + 709 = 8 \cdot 3000 + 7709$$

Procedemos da mesma forma com 7709. Temos $77 = 8 \cdot 9 + 5$, e daí

$$7709 = 7700 + 9 = 8 \cdot 900 + 500 + 9 = 8 \cdot 900 + 509$$

Agora com 509, calculamos $50 = 8 \cdot 6 + 2$, e então

$$509 = 500 + 9 = 8 \cdot 60 + 20 + 9 = 8 \cdot 60 + 29$$

e, finalmente,

$$29 = 8 \cdot 3 + 5$$

Em resumo,

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
 & 3 & 1 & 7 & 0 & 9 & 8 & & & \\ \cline{7-10}
- & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-6}
 & & 7 & 7 & 0 & 9 & & 9 & 0 & 0 \\
 & - & 7 & 2 & 0 & 0 & & + & 6 & 0 \\ \cline{2-6}
 & & & 5 & 0 & 9 & & & & 3 \\ \cline{7-10}
 & & - & 4 & 8 & 0 & 3 & 9 & 6 & 3 \\ \cline{3-6}
 & & & & 2 & 9 & & & & \\
 & & & - & 2 & 4 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 5 & & & &
\end{array}$$

O estudo da gênese do algoritmo usual da divisão coloca em evidência dois dispositivos que lidam com dificuldades específicas do aprendizado da divisão. Um deles é o dispositivo longo, que desmembra as operações de multiplicação e subtração, as quais são realizadas simultaneamente no dispositivo usual, quando se calculam os divisores parciais.

Eis o dispositivo longo:

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
 & 3 & 1 & 7 & 0 & 9 & 8 & & & \\ \cline{7-10}
- & 2 & 4 & & & & 3 & 9 & 6 & 3 \\ \cline{1-3}
 & & 7 & 7 & & & & & & \\
 & - & 7 & 2 & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 5 & 0 & & & & & \\
 & & - & 4 & 8 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 2 & 9 & & & & \\
 & & & - & 2 & 4 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 5 & & & &
\end{array}$$

Comparando o dispositivo longo com o comum, vemos que o primeiro exige menos treinamento e menor uso da memória do que o segundo. Um estudante terá menos dificuldade em aprender o algoritmo da divisão se iniciar com o método longo, e, depois de ter dominado este, estudar o método comum.

O outro dispositivo lida com o processo de tentativa e erro no cálculo dos quocientes parciais. Por exemplo,

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & 1 & 7 & 0 & 9 & & 8 \\ \cline{7-7}
-2 & 4 & & & & & 3\ 8 \\ \cline{1-2}
 & 7 & 7 & & & & +1 \\ \cline{7-7}
- & 6 & 4 & & & & 3\ 9\ 6\ 3 \\ \cline{1-3}
 & 1 & 3 & & & & \\
 & - & 8 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5 & 0 & & & \\
 & - & 4 & 8 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 2 & 9 & & \\
 & & - & 2 & 4 & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 5 & &
\end{array}
$$

No cálculo acima, o quociente de 77 por 8 foi subestimado, o que ficou evidente pelo fato de ser o resto 13 maior do que 8. Para corrigir, basta somar 1 ao quociente parcial e subtrair 8 de 13. Após isto, o cálculo continua normalmente.

Este último dispositivo é especialmente adequado quando o divisor tem dois ou mais dígitos. Seu uso facilita para o estudante a correção de erro para menos na estimativa dos quocientes parciais e pode traduzir uma oportunidade de melhor compreensão do mecanismo do algoritmo usual.

O método usual de divisão se aplica em qualquer sistema numérico posicional. Vejamos um exemplo na base quinária.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4 & 2 & 3 & 1\ 2 \\ \cline{5-5}
- & 4 & 1 & & 3\ 1 \\ \cline{1-4}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & 1 & 2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

Vimos, no Capítulo 2, diversos exemplos de mudanças de base em sistemas numéricos posicionais. Ali, todas as mudanças eram feitas usando-se a base dez como intermediária, mas observamos que existem formas diretas de transposição. Com os conhecimentos adquiridos neste capítulo, podemos efetuar mudanças de base diretamente, sem passar pela base dez.

Como exemplo calculamos a seguir a representação de $(325)_{seis}$ na base oito. Podemos proceder de duas formas. A primeira consiste em expandir $(325)_{seis}$ na base seis e fazer os cálculos na base oito.

$$
\begin{aligned}
(325)_{seis} &= 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 5 \\
&= 3 \cdot (44)_{oito} + (14)_{oito} + 5 \\
&= (154)_{oito} + (14)_{oito} + 5 \\
&= (175)_{oito}
\end{aligned}
$$

A segunda forma consiste em fazer divisões sucessivas de $(325)_{seis}$ por $(12)_{seis}$ na base seis. Observe o estudante que $(12)_{seis}$ é a representação de oito na base seis. Temos

$$\begin{array}{rrr|l} & 3 & 2\ 5 & 1\ 2 \\ \cline{4-4} - & 2 & 4 & 2\ 3 \\ \cline{1-3} & 0 & 4\ 5 & \\ & - & 4\ 0 & \\ \cline{2-3} & & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} & 2\ 3 & 1\ 2 \\ \cline{3-3} - & 1\ 2 & 1 \\ \cline{1-2} & 1\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 1\ 2 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$$

Os restos obtidos são 1_{seis}, 11_{seis} e 5_{seis}. Na base oito estes restos são 1_{oito}, 7_{oito} e 5_{oito}, e estes são os dígitos procurados, ou seja,

$$(325)_{seis} = (175)_{oito}$$

A mais antiga forma de divisão conhecida pela História da Matemática é a que era utilizada pelos egípcios da Antiguidade. Vamos dar um exemplo do método com o cálculo de 250 dividido por 7.

Dispomos os cálculos em duas colunas:

$$\begin{array}{crr} \star & 1 & 7 \\ \star & 2 & 14 \\ & 4 & 28 \\ & 8 & 56 \\ & 16 & 112 \\ \star & 32 & \underline{224} \\ & & 245 \end{array}$$

Na segunda coluna começamos com o divisor 7 e o duplicamos sucessivamente até obter um número menor ou igual a 250 e maior do que a metade de 250 (portanto, o número seguinte seria maior do que 250). Na primeira coluna, colocamos as potências de 2, começando com $2^0 = 1$.

O próximo passo do método consiste em procurar, entre os números da segunda coluna, aqueles cuja soma seja menor ou igual a 250, o mais próxima possível. Vemos que $7+14+224 = 245$, e esta é a soma mais próxima de 250 que podemos obter com os números da segunda coluna. Assinalamos com $\star$ as linhas que contêm os números escolhidos na segunda coluna.

Finalmente, adicionamos os números da primeira coluna que estão nas linhas assinaladas por $\star$: $1 + 2 + 32 = 35$. Este é o quociente. O resto é $250 - 245 = 5$.

3.6.3 Problemas

Problema 3.6.3.1. Sejam a e b números naturais. Suponha que ao "dividir" a por b de várias formas se encontrem números naturais q, t, r e s tais que $a = bq + r$ e $a = bt + s$. Por exemplo, se $a = 23$ e $b = 3$ podemos ter $a = 7b + 2$ e $a = 6b + 5$. **a)** Identifique alguma regularidade sobre r e s nessas situações. **b)** Se $r, s < b$, o que mais se pode afirmar?

Problema 3.6.3.2. Vejamos a divisão de 13 732 por 17 segundo as regras usuais. Como $1 < 17$, pegamos 13; como $13 < 17$, pegamos 137, que dividido por 17 tem 8 como o maior divisor possível. Sobra 1, que colocamos abaixo do dígito 7 do dividendo. Abaixamos o dígito 3 do dividendo. Como $13 < 17$, colocamos zero no divisor, e em seguida abaixamos o dígito 2 do dividendo. Ficamos com 132, que dividido por 17 dá 7, e o resto é 13. O cálculo final tem a seguinte forma.

```
1 3 7 3 2 | 1 7
          +------
    1 3 2   8 0 7
      1 3
```

Explique por que devemos colocar um zero no divisor.

Problema 3.6.3.3. Estude a seguinte a seguinte disposição do algoritmo usual de divisão utilizado em alguns países:

```
                3 9 6 3   ⟵ quociente
             ___________
divisor ⟵ 8 | 3 1 7 0 9   ⟵ dividendo
              2 4
              ---
                7 7
                7 2
                ---
                  5 0
                  4 8
                  ---
                    2 9
                    2 4
                    ---
                      5   ⟵ resto
```

Problema 3.6.3.4. O sinal ÷ pode ser utilizado para indicar a operação de divisão. Efetue as seguintes divisões nas bases solicitadas usando o algoritmo usual:

$$(34203)_{cinco} \div (3)_{cinco}$$

$$(402103)_{cinco} \div (23)_{cinco}$$

$$(1100110)_{dois} \div (11)_{dois}$$

$$(53024)_{sete} \div (61)_{sete}$$

$$(9AB08)_{doze} \div (25)_{doze}$$

Problema 3.6.3.5. Faça as seguintes mudanças de base, sem utilizar a base dez como intermediária. Use ambas as formas explicadas no texto. **a)** $(212)_{três}$ para a base cinco; **b)** $(408)_{nove}$ para a base sete.

3.7 Verificação de cálculos aritméticos

Nos dias atuais o trabalho de realizar cálculos aritméticos está muito facilitado com o uso das calculadoras eletrônicas. Por isso existe hoje um desinteresse a respeito dos métodos de verificação do acerto de cálculos aritméticos. Mas para completar a formação do estudante em Aritmética não poderíamos terminar esse capítulo sem comentar brevemente alguns desses métodos.

A verificação mais imediata de um cálculo aritmético consiste em repetir as contas. Pode ser útil modificar a situação inicial, por exemplo, na adição e na multiplicação podemos repetir o cálculo trocando a ordem das parcelas. Podemos também verificar um cálculo aritmético usando a chamada *prova real*, que consiste em verificar a operação realizando a operação inversa.

Tira-se a prova real de uma adição por meio da subtração. Por exemplo,

$$\begin{array}{r} 37589 \\ +29805 \\ \hline 67394 \end{array} \qquad \text{prova:} \quad \begin{array}{r} 67394 \\ -29805 \\ \hline 37589 \end{array}$$

Tira-se a prova real de uma subtração somando-se o subtraendo com o resto. O resultado deve ser o minuendo. Pode-se também subtrair o resto do minuendo. O resultado deve ser o oposto do subtraendo.

A prova real da multiplicação consiste em dividir o produto por um dos fatores. O quociente deve ser o outro fator, e o resto, zero. Por outro lado, a prova real da divisão consiste em multiplicar o divisor pelo quociente, e ao produto assim obtido soma-se o resto da divisão. O resultado deve ser o dividendo.

Se a aplicação de uma prova dá resultado positivo conclui-se que o cálculo original está provavelmente correto. Pode-se cometer na prova um erro que compense algum engano feito no primeiro cálculo, mas é pouco provável que ocorra esta coincidência.

Vejamos a chamada *prova do nove*. Começamos explicando a antiga expressão "tirar os noves fora". Dado um número natural $a > 9$, formamos o número natural $s(a)$ obtido com a soma dos dígitos decimais de a. Por exemplo, $s(160) = 1+6+0 = 7$, e $s(8\,714) = 8+7+1+4 = 20$. Se $a = 9$, pomos $s(9) = 0$.

Observamos que para todo número natural a, $s(a)$ é um resto da divisão de a por 9. Por exemplo, $367 = 3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 = 3(99+1) + 6(9+1) + 7 = 3 \cdot 99 + 3 + 6 \cdot 9 + 6 + 7 = 9q + (3+6+7) = 9q + s(a)$, para um certo número natural q. Portanto, $s(a)$ é um resto da divisão de a por 9. O estudante é convidado a fazer uma demonstração geral desse fato no Problema 6.6.9, na página 163.

"Tirar os noves fora" de um número a significa aplicar sucessivamente a operação $s(a)$ até que se obtenha um número < 9, que é o menor resto da divisão de a por 9. Isto sempre é possível, pois se $a \geq 9$ então $s(a) < a$.

Na prática, podemos descartar o valor 9 à medida que formos somando os dígitos do número dado. Por exemplo, se $a = 86946$, somamos $8+6 = 14$, e já fazemos $1+4 = 5$, e ficamos com 5. Descartamos o dígito seguinte, que é 9, e fazemos $5+4 = 9$, que é descartado. Fica 6, que é o menor resto da divisão de $a = 86946$ por 9. Esse procedimento inspirou o nome "tirar os noves fora".

Observamos agora que se a, b e c são números naturais tais que $a+b = c$, então $r(r(a) + r(b)) = r(c)$, de acordo com o Problema 6.6.10, página 163. Esta é a prova do nove para a adição. Vejamos um exemplo.

$$\begin{array}{rcr} 94795 & \longrightarrow & 7 \\ +87367 & \longrightarrow & +4 \\ \hline 182162 & & 11 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 2 \end{array}$$

Observe que 94795 noves fora é 7, e 87367 noves fora é 4. Temos $7+4 = 11$, e 11 noves fora é 2. Como 182 162 noves fora é também 2, vemos que o cálculo passa pela prova do nove.

Se um cálculo de adição não passa pela prova do nove, então ele está errado, conforme já observamos. Mas a recíproca desta afirmação não é verdadeira. Isto é, se um cálculo de adição

passa pela prova do nove, o cálculo não está necessariamente correto. Por exemplo,

$$\text{(incorreto)} \qquad \begin{array}{r} 94795 \\ +87367 \\ \hline 183152 \\ \downarrow \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ +4 \\ \hline 11 \\ \downarrow \\ 2 \end{array}$$

Vemos neste exemplo que a prova do nove não detectou o erro. Se a prova do nove não revela erro em um cálculo de adição, então a soma verdadeira e a soma incorreta diferem de um múltiplo de 9. A probabilidade de ocorrer isto é relativamente baixa, e por isto se diz que se o cálculo passa pela prova, então ele está provavelmente correto.

De forma análoga podemos aplicar a prova do nove para a subtração, a multiplicação e a divisão. A prova dos nove também não é conclusiva para essas operações.

3.8 Problemas adicionais

Problema 3.8.1. Em uma escola foi pedido a um estudante calcular $12 + 15$. Ele fez alguns cálculos com os dedos e respondeu: 9. O que pode ter acontecido?

Problema 3.8.2. Estudantes fizeram os cálculos descritos abaixo. Descubra os passos que seguiram e que os fizeram cometer esses erros.

7 0 5 − 3 4 8 = 2 6 7

1 2 3 4 − 9 7 6 = 4 7 8

Problema 3.8.3. Elabore regras sintéticas para se calcular a soma de quatro número naturais consecutivos. E quanto a seis números consecutivos?

Problema 3.8.4. Explique por que nunca se usou uma "prova do cinco", em vez da prova do nove, na verificação de cálculos aritméticos.

Problema 3.8.5. Encontre um método de verificação de cálculos aritméticos equivalente à prova do nove em sistemas de numeração em outras bases. Dê alguns exemplos na base quatro. Como se aplica o método na base dois?

Problema 3.8.6. Demonstre que se um número terminado em 5 (no sistema decimal) é quadrado de um número natural, então o dígito das dezenas é 2.

Problema 3.8.7. Uma *grosa* é igual a doze dúzias. Usando aritmética duodecimal, resolva os seguintes problemas. **a)** Um comerciante tinha dez grosas de ovos. Vendeu 5 grosas, 7 dúzias e 8 unidades. Quanto restou? **b)** Três sócios devem repartir uma produção de dezessete grosas, oito dúzias e onze unidades de ovos. Quanto caberá a cada um?

Problema 3.8.8. Um estudante, ao efetuar $(5114)_{seis} - (3532)_{seis}$ na base seis, procedeu da seguinte forma. Primeiro fez a conta na base dez, como se os números estivessem na base dez:

$$\begin{array}{r} 5\,1\,1\,4 \\ -3\,5\,3\,2 \\ \hline 1\,5\,8\,2 \end{array}$$

Depois, substituiu os dígitos 5 e 8 do número assim obtido pelas diferenças $5-4=1$ e $8-4=4$, obtendo o número $(1142)_{seis}$, que afirmou ser a resposta correta. Confira o resultado e explique. Investigue se o método funciona em outras bases.

Problema 3.8.9. Um indivíduo, visitando um país exótico, soube que ali se usava um sistema numérico posicional com algarismos 0, 1, 2, ..., e que o nome da unidade monetária era rupi. Em uma loja, deu ao comerciante uma nota de 400 rupis para pagar 135 rupis. O comerciante pediu 5 rupis para facilitar o troco, que foi de 250 rupis. Qual era a base do sistema numérico?

Problema 3.8.10. Um país de cultura antiga tem três tipos de moeda: a de menor valor, pini, a de valor intermediário, marc, e a de maior valor, drac. Um turista, para pagar uma conta de 7 marcs e 8 pinis em um restaurante, deu 1 drac, e recebeu de troco 1 marc e 4 pinis. Observando depois que 9 pinis perfazia quase 10% da conta, deu-os ao garçon.

Calcule quantos pinis vale 1 marc, e quantos marcs vale 1 drac.

Problema 3.8.11. Calculando algumas potências quínticas de números naturais observamos que o número e sua potência sempre têm a mesma unidade. Justifique por que isso ocorre para qualquer número natural.

Problema 3.8.12. Para transformar um número, cuja representação decimal tenha dois dígitos, para a base nove, basta adicioná-lo ao número constituído pelo dígito das dezenas do número dado, sendo que a adição deve ser feita na base nove. Explique. Aplique esta regra calculando a representação de 58 na base nove.

Problema 3.8.13. Confira os seguintes cálculos: $9\times 9=81$ na base dez, $4\times 4=31$ na base cinco, $8\times 8=71$ na base nove. Que regularidade pode ser observada? Dê uma fórmula que generalize esses produtos em uma base qualquer β, e justifique.

Problema 3.8.14. Observe que na base decimal $9+9=18$ é o reverso de $9\times 9=81$. Mostre que uma situação análoga ocorre em um sistema posicional de base β qualquer.

Problema 3.8.15. Mostre que na tábua de multiplicação do 9 na base dez a soma dos dígitos de qualquer produto é sempre 9 (exceto para 9×0). Generalize para uma base qualquer.

Problema 3.8.16. A *regra turca* para calcular o produto de dois algarismos situados entre 7 e 9 pode ser exemplificada com o cálculo de 7×8. Mantemos uma das mãos com dois dedos levantados, os quais correspondem a $7-5=2$. Na outra mão, mantemos três dedos levantados, que correspondem a $8-5=3$. O produto $7\times 8=(a_1a_2)_{10}$ é assim calculado: o dígito das dezenas a_1 é o total dos dedos levantados, no caso $a_1=2+3=5$; o dígito das unidades a_0 é o produto dos números dos dedos que não estão levantados em cada mão. No caso, $a_0=3\times 2=6$. Portanto, $7\times 8=56$. Dê uma demonstração algébrica para a regra turca.

Problema 3.8.17. Encontre o dígito d que está faltando para completar a seguinte multiplicação:

$$9\,966\,334\times 9\,966\,332=99\,327\,d93\,466\,888.$$

Problema 3.8.18. O algoritmo usual de adição pode ser descrito algebricamente. Estude a seguinte versão. Utilize-a para implementar $67493+4568$.

Notemos primeiro que dois números naturais a e b podem ser representados no sistema decimal com a mesma quantidade de dígitos, bastando para isso acrescentar o algarismo zero à esquerda de um deles, se necessário.

Sejam então $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$ e $b = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)$. Para calcular $a + b$ devemos executar os seguintes passos, com $i = 1, 2, \dots, n$:

(*passo 0*) calcular os números naturais q_0 e c_0 tais que $a_0 + b_0 = q_0 \cdot 10 + c_0$, com $q_0 = 0$ ou 1 e $0 \leq c_0 \leq 9$;

(*passo i*) calcular os números naturais q_i e c_i tais que $a_i + b_i + q_{i-1} = q_i \cdot 10 + c_i$, com $q_i = 0$ ou 1 e $0 \leq c_i \leq 9$.

A soma é $a + b = (q_n c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)$.

Problema 3.8.19. Estude a seguinte descrição algébrica do algoritmo usual da subtração. Aplique o algoritmo para calcular $3534 - 2627$.

Sejam $a = (a_n \dots a_1 a_0)$ e $b = (b_n \dots b_1 b_0)$ números naturais tais que $a > b$. Para encontrar a diferença $a - b$, procedemos as seguintes etapas, com $1 \leq i \leq n$:

(*passo 0*) calcular os números inteiros q_0 e c_0 tais que $a_0 - b_0 = q_0 10 + c_0$, com $0 \leq c_0 \leq 9$. Temos $q_0 = 0$ se $a_0 \geq b_0$, e $q_0 = -1$ se $a_0 < b_0$ (neste caso, q_0 é o "empréstimo").

(*passo i*) calcular os números inteiros q_i e c_i tais que $a_i - b_i + q_{i-1} = q_i 10 + c_i$, com $0 \leq c_i \leq 9$, e $q_i = 0$ ou -1.

Como $a > b$, vem que $q_n = 0$. A diferença procurada é $a - b = (c_n \dots c_1 c_0)$.

Problema 3.8.20. Explique o seguinte procedimento de adivinhação. Comece com dois números naturais não nulos menores do que dez (não necessariamente diferentes). Multiplique o primeiro por 2 e adicione 5. Multiplique o resultado por 5, e some 10. Adicione o segundo número, e subtraia 35. Resulta um número com dois dígitos; o dígito das dezenas é o primeiro dos dois números iniciais, e o dígito das unidades, o segundo.

Problema 3.8.21. Verifique os seguintes procedimentos de adivinhação de números. **a)** Escolha um número de dois algarismos $(ab)_{dez}$. Multiplique-o por 15, e depois por 7. Subtraia o quádruplo do número. Obtém-se $(abab)_{dez}$. **b)** Escolha um número de dois algarismos $(ab)_{dez}$. Multiplique-o por 13, e depois por 8. Subtraia o triplo do número. Obtém-se $(abab)_{dez}$.

Problema 3.8.22. Verifique o seguinte procedimento de adivinhação. Dado um número (natural), multiplique-o por 5, e adicione 6. Em seguida, multiplique o resultado por 4 e adicione 9. Finalmente, multiplique por 5. Elimine do final da representação do resultado o agrupamento 65. Do número resultante, subtraia 1. Este é o número inicial.

Problema 3.8.23. Escolha três algarismos, não necessariamente diferentes, sendo que pelo menos um deles deve ser não nulo. Tome o primeiro algarismo (que não seja nulo), multiplique-o por 5, e adicione 3. Dobre o resultado e adicione o segundo algarismo. Multiplique por 10 e adicione o terceiro algarismo. Subtraia 60. O resultado é um número com três dígitos. O dígito das centenas é o primeiro algarismo escolhido. O dígito das dezenas é o segundo algarismo escolhido, e o das unidades, o terceiro. Por que funciona?

Problema 3.8.24. Pense em um número natural maior do que ou igual a 20. Some seus dígitos, e subtraia esta soma do número inicial. Cancele um dígito qualquer do resultado. Some os dígitos do número resultante, obtendo-se um número a. Pode-se tentar "adivinhar" o dígito cancelado a partir do conhecimento de a. Temos dois casos: *1º caso*: a não é divisível por 9. Então o dígito cancelado é o número que é preciso somar a a para que ele se torne divisível por 9. *2º caso*: a é divisível por 9. Então o dígito cancelado é zero ou 9. Explique.

Problema 3.8.25. Confira a seguinte brincadeira com dados. Jogue um dado três vezes, e anote os números obtidos. Para melhor explicar, suponhamos que estes números tenham sido 1, 2 e 4. Considere em sequência os números das faces opostas, respectivamente, 6, 5 e 3. Forme o número 124653. Divida-o por 37×3, do quociente subtraia 7, e divida a diferença por 9. O número obtido será 124, que recupera os dígitos iniciais sorteados. Demonstre que isto sempre ocorre, quaisquer que sejam os dígitos iniciais sorteados. Como ficaria esta brincadeira com dados octaedrais?

Problema 3.8.26. Demonstre a seguinte mágica com o número 1089. Tome um número com três dígitos, de modo que a diferença entre os dígitos dos extremos seja ≥ 2. Tome o reverso deste número e faça a diferença (do maior subtrai-se o menor). Tome o reverso da diferença. A soma do terceiro número com o quarto é 1089.

Problema 3.8.27. Tome um número de três dígitos, por exemplo 716. Considere o número 716 716. Divida-o por 7, depois por 11, e finalmente por 13. Obtém-se o número inicial 716. Verifique e explique por que isso funciona para qualquer número de três dígitos.

Problema 3.8.28. Considere todos os números constituídos pelas permutações dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Alguns desses números são 123456789, 213456789, 231456789. **a)** Calcule a quantidade dos números assim obtidos. **b)** Calcule a soma de todos esses números.

Problema 3.8.29. Descreva os números naturais a e b tais que $ab > a + b$.

Uma *balança de dois pratos sem escala* é um dispositivo mecânico que permite comparar o peso de dois objetos, isto é, colocando-se um objeto em um prato e outro no segundo prato, o dispositivo indica se os objetos têm o mesmo peso ou qual dos dois é o mais pesado.

Problema 3.8.30. São dadas n moedas idênticas na aparência. Todas têm o mesmo peso, exceto uma, que é um pouco mais pesada do que as outras. Elabore procedimentos que permitam encontrar a moeda mais pesada usando uma balança de dois pratos sem escala. Encontre fórmulas para o número de pesagens, ou cotas superiores para esse número.

Um *sistema de pesos para uma balança de dois pratos sem escala* consiste de um conjunto de peças $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ..., $\mathbf{p}_n$ satisfazendo às condições: **a)** cada peça $\mathbf{p}_i$ pesa $p_i \in \mathbb{N}$ unidades de massa, e $1 = p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$; **b)** todo número natural de 1 a $p_0 + p_1 + \ldots + p_n$ inclusive tem uma representação balanceada $p_j + \sigma_{j-1}p_{j-1} + \ldots + \sigma_0 p_0$, sendo $\sigma_i = -1$, 0 ou 1 para todo $0 \leq i \leq j$ para algum $j \leq n$.

Nestas condições se diz também que os números p_0, p_1, p_2, ..., p_n constituem um sistema de pesos para uma balança de dois pratos sem escala. A condição **b)** significa que todo objeto com peso inteiro $\leq p_0 + p_1 + \ldots + p_n$ pode ter seu peso avaliado com as peças. A peça $\mathbf{p}_i$ será colocada no mesmo prato em que está o objeto se $\sigma_i = -1$, e no prato oposto se $\sigma_i = 1$. A peça não será utilizada na pesagem se $\sigma_i = 0$ (p_i não comparece na representação).

Problema 3.8.31. Demonstre que os seguintes conjuntos de números naturais constituem um sistema de pesos para uma balança de dois pratos sem escala: **a)** 1, 2, 4, 8 e 16; **b)** 1, 3, 9 e 27; **c)** 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50, 100.

3.9 Sugestões de atividades orientadas

Atividade 3.9.1. Pesquise em bibliografia especializada sobre a conveniência ou não de se utilizar nas escolas o ensino da aritmética através de ábacos, e só depois disso utilizar a linguagem escrita.

Atividade 3.9.2. Pesquise em bibliografia especializada opiniões sobre o ensino de técnicas mentais para as operações aritméticas, e também sobre métodos aproximados.

Atividade 3.9.3. Um estudante, pretendendo evitar o uso do "vai um", inventou o seguinte dispositivo para somar dois números com dois dígitos:

$$\begin{array}{r} 27 \\ +19 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 20+\ \ 7 \\ +10+\ \ 9 \\ \hline 30+16 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 30 \\ +16 \\ \hline 46 \end{array}$$

a) Este método sempre evita o transporte da dezena? **b)** O estudante compreendeu a estrutura da representação posicional? **c)** Investigue se é viável utilizar o método do estudante nas escolas, ensinando-o antes do método usual. Pesquise em bibliografia especializada ou consulte professores da escola básica. **d)** Se um professor resolver ensinar primeiro o método do estudante e depois o método usual, como ele irá mostrar para os estudantes a necessidade de estudar o método usual?

Atividade 3.9.4. Foi solicitado de um estudante calcular $63787 \div 3$. Ele fez o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 6\,3\,7\,8\,7 & 3 \\ \cline{2-2} 0\,0\,1\,2\,1 & 2\ \ 1\ \ 2\ \ 2\,2 \\ 0\,1 & \qquad\ \ +\,4 \\ \cline{2-2} & 2\ \ 1\ \ 2\ \ 6\,2 \end{array}$$

A conclusão do estudante foi: o quociente é 21262 e o resto é 1.

a) Verifique se o resultado está correto. **b)** Verifique se o método utilizado pelo estudante está correto, levando em conta a estrutura do sistema de representação decimal e o algoritmo da divisão. **c)** Verifique se o método funciona bem em outras situações, por exemplo: $708039 \div 8$; $31729 \div 6$; $310012 \div 2$. **d)** O estudante mostrou que compreendeu a estrutura do sistema de representação decimal? O estudante mostrou que compreendeu o mecanismo do algoritmo usual de divisão? O método usado pelo estudante deve ser ensinado para os colegas de classe? Esse método deveria substituir o algoritmo usual? O professor deve proibir o estudante de usar esse método em suas avaliações formais?

3.10 Temas para investigação

Tema 3.10.1. Investigue o seguinte problema. Dados números naturais, um com n dígitos e outro com m dígitos, quantos dígitos tem: **a)** sua soma; **b)** sua diferença; **c)** seu produto; **d)** o quociente e o resto da divisão do maior pelo menor.

Tema 3.10.2. Considerando o sistema de numeração decimal e o Problema 2.5.18 da página 30, caracterize os números naturais que, somados com seu reverso, resulta em um múltiplo de 11. E quanto a sistemas em outras bases?

Tema 3.10.3. Tomando um número e somando com seu reverso, tomando o resultado e somando novamente com seu reverso, e repetindo a operação tantas vezes quanto for necessário, parece que sempre obtemos um número palíndromo. Investigue isso.

Tema 3.10.4. Tome um número e seu reverso. Subtraia o menor do maior. Tome o resultado e repita o processo. Repita se achar necessário. O que acontece?

Tema 3.10.5. Investigue se um resultado análogo ao do Problema 3.8.11 funciona para outras bases e outras potências.

Tema 3.10.6. Um número natural n de dois dígitos (portanto $10 \leq n \leq 99$) é denominado *supernúmero* se n é a soma $n = a + b$ de números naturais a e b, cada um com dois dígitos, e se a soma dos dígitos de n é igual à soma conjunta dos dígitos de a e de b.

Investigue quem são os supernúmeros n e como são as parcelas a e b tais que $n = a + b$ nas condições dadas.

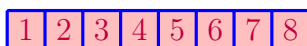
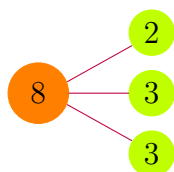
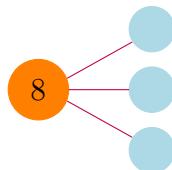
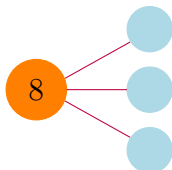
Dado um supernúmero n, as decomposições $n = a + b$ e $n = b + a$ são consideradas iguais. Determine quantas decomposições diferentes tem n.

Investigue o que ocorre com números com um dígito, três dígitos, etc.

Tema 3.10.7. Chamamos de *operação unitária* a uma adição ou multiplicação de dois algarismos decimais quaisquer. **a)** Dados números naturais a e b representados no sistema decimal, seja $A(a, b)$ a quantidade de operações unitárias necessárias para somar a e b usando o algoritmo usual. Encontre uma cota superior para $A(a, b)$ em função do número de dígitos de a e de b. Isto é, encontre um número $c(n, m)$ tal que $A(a, b) \leq c(n, m)$, sendo n o número de dígitos de a e m o número de dígitos de b. **b)** Dados números naturais a e b representados no sistema decimal, seja $M(a, b)$ a quantidade de operações unitárias necessárias para multiplicar a e b usando o algoritmo usual. Encontre uma cota superior para $M(a, b)$ em função do número de dígitos de a e de b.

Tema 3.10.8. Tome um número de quatro dígitos, não todos iguais. Rearranjando os dígitos coloque-os em ordem decrescente, e depois em ordem crescente (isto é, tome o maior e o menor dentre os números que podem ser escritos com os dígitos do número considerado inicialmente). Subtraia o menor do maior. Encontre um número invariante quando submetido a esse procedimento. O que ocorre com outros números se aplicarmos o procedimento sucessivamente? O que ocorre com números com dois dígitos? Com três? Alguma generalização?

Tema 3.10.9. Investigue se é possível construir táboas para as operações de adição e de multiplicação para o sistema fatorial, definido na página 34.

Tema 3.10.10. Em uma atividade (adaptada) para crianças do 1º ano da escola básica, um livro texto pede decomposições de 8 como soma de três números. As crianças podem trabalhar com barras na forma concreta ou representadas por desenhos, ou usando uma balança de equilíbrio, ou outras formas. É uma atividade que antecede o aprendizado do uso do símbolo de adição + ou de relações como $8 = 2 + 3 + 3$.

Levando em conta que agora você está no ensino superior, generalize essas ideias. Faça perguntas pertinentes gerais usando linguagem algébrica. Você tem alguma conjectura? Alguma demonstração? Não se esqueça de considerar também o possível uso de outra operação, além da adição.

Parte II

Introdução à teoria dos números naturais

Capítulo 4

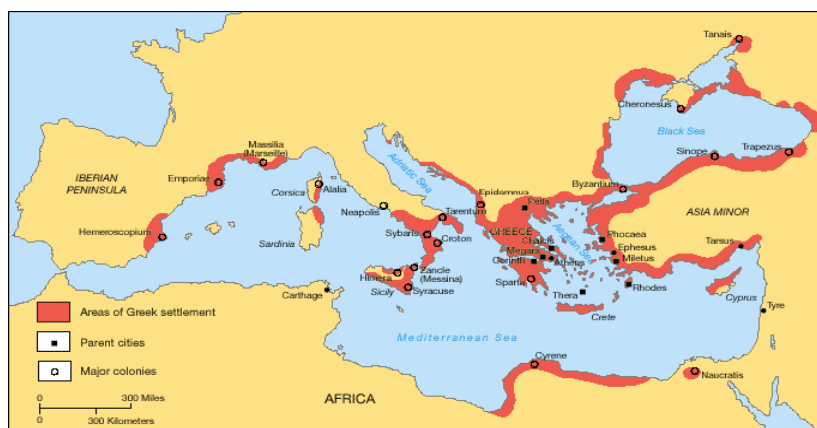
O ideal matemático da Antiga Grécia

4.1 Introdução

A antiga civilização grega, particularmente a do Período Arcaico (776 a 323 a. C.), é considerada a origem da atual civilização ocidental. Desenvolveu os ideais filosóficos, científicos, políticos, sociais e artísticos que tiveram influência decisiva no mundo ocidental.

A Matemática, vista como ciência dedutiva, começou a ser desenvolvida nesse período. Antes dos gregos os estudiosos egípcios, sumérios, hindus e persas investigavam os números e as formas geométricas através de um senso estético. Os matemáticos gregos conservaram a beleza mas a transformaram completamente, criando uma ciência dedutiva, com definições, postulados, axiomas e teoremas. Confira [111], página XI.

Distinguiram-se, dentre muitos estudiosos, os discípulos das Escolas Pitagórica e Platônica, que se dedicaram ao estudo das figuras e números usando métodos de análise e dedução. Sobre Pitágoras de Samos afirma Proclus Diadochus, filósofo e historiador da Matemática, que ele transformou o estudo da Geometria em uma arte livre, examinando os princípios dessa ciência desde sua gênese. Aristoxenus de Tarento, filósofo grego do século quatro a. C., afirma ainda que Pitágoras dava muita importância ao estudo da Aritmética, em que promoveu grandes avanços, desvinculando-a de suas aplicações comerciais. Confira [44], página 37. Os resultados matemáticos obtidos nesse período foram organizados na famosa coleção de livros *Os Elementos*, escrita por Euclides em Alexandria por volta de 300 a. C.

Figura 4.1. No mapa estão indicados os territórios da Antiga Grécia, no Período Arcaico (776 a 323 a. C.). Estão assinalados também os assentamentos gregos, as colônias e cidades coligadas.

Para iniciar nossos estudos em Teoria dos Números seguem alguns problemas sobre números naturais. O primeiro está resolvido.

Problema resolvido 4.1. Um estudante fez uma tabela com duas linhas e cem colunas. Na primeira linha escreveu os números naturais de 1 a 100 em sua ordem natural. Na segunda linha escreveu a letra Q embaixo de todos os números que são quadrados de números naturais, e a letra N embaixo dos outros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	100
Q	N	N	Q	N	N	N	N	Q	N	N	N	N	N	N	Q	N	...	Q

a) Quantas vezes o estudante escreveu a letra Q e quantas a letra N? **b)** Se a tabela continuasse indefinidamente, pergunta-se para que valores de n haveriam sequências do tipo $QNN \dots NQ$ com n letras N entre duas letras Q.

Solução. **a)** De 1 a 100 os quadrados de números naturais são $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, ... $10^2 = 100$, portanto são dez. Dessa forma a letra Q foi escrita dez vezes e a letra N, noventa. **b)** Entre um quadrado m^2 e seu consecutivo $(m+1)^2$ existem $(m+1)^2 - m^2 - 1 = 2m$ posições (excluindo as posições de m^2 e $(m+1)^2$). Então $n = 2m$ para todo número natural $m \geq 1$. □

4.2 Problemas

Problema 4.2.1. Consideremos os números naturais dispostos, em sua sequência natural, em linhas com cinco números em cada linha:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

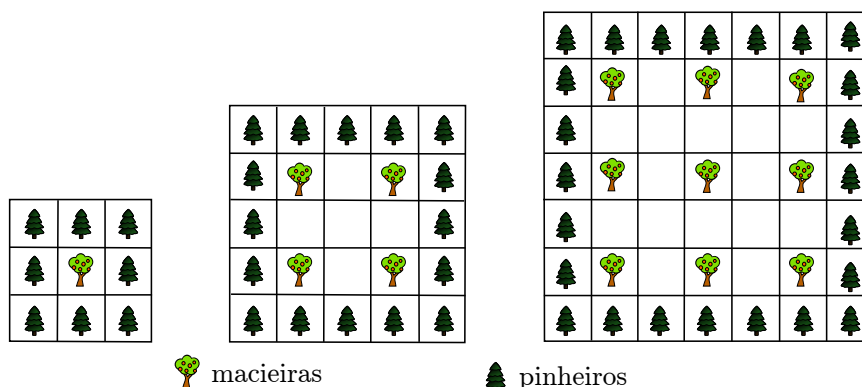
a) Pergunta-se em que linha a soma dos números que a compõem é igual a 665 (descreva quais são os números que fazem parte dessa linha e qual a posição da linha na sequência de linhas).
b) Se o problema foi resolvido, descreva o processo de descoberta. Analise se foi feita uma indução[1] ou uma dedução[2]. Considere se sua solução necessita de alguma justificativa algébrica, e elabore esta justificativa.
c) Imagine que você esteja trabalhando com uma classe de estudantes e resolve apresentar-lhes o problema acima. Você aceitaria como válida uma solução indutiva, ou exigiria uma solução dedutiva? Em que situações o professor deveria trabalhar com um ou outro caso?

Problema 4.2.2. Consideremos os números naturais dispostos em linhas, em sua sequência natural, conforme descrito abaixo. Que propriedades podem ser observadas? Alguma demonstração?

[1]Indução: operação que estabelece uma proposição geral com base no conhecimento de um certo número de dados particulares.

[2]Dedução: operação que estabelece uma proposição geral com base em uma ou mais premissas com uma correta aplicação das regras da Lógica.

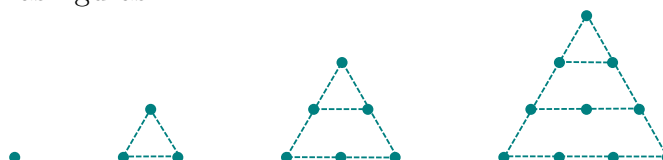
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \dots \end{array}$$

Problema 4.2.3. Um fazendeiro planeja plantar macieiras em um terreno quadrado. Para protegê-las do vento pretende plantar pinheiros ao redor das macieiras. Desenhou três diagramas para estudo.

Tomando como unidade de medida o lado do quadradinho ocupado por uma planta, o fazendeiro necessita responder às seguintes questões: **a)** qual o lado do terreno necessário para plantar k^2 macieiras; **b)** quantos pinheiros são necessários para plantar k^2 macieiras; **c)** observando que nos diagramas acima a quantidade de pinheiros é maior do que a de macieiras, quais são os valores de k para os quais a situação se inverte. **d)** Para cada um dos itens resolvidos, você fez uma indução ou uma dedução?

4.3 Números e Geometria

O estudo dos números no tempo dos antigos gregos era fortemente influenciado pela Geometria, já que esta aglutina elementos mais concretos aos conceitos abstratos da Matemática. Dessa forma os números eram classificados de acordo com propriedades geométricas correspondentes, e números eram obtidos a partir de outros mediante manipulação de figuras.

Por exemplo, o produto de um número natural por outro era visto como a área de um retângulo, e particularmente o produto de um número natural por si mesmo era visto como a área de um quadrado. Os números assim gerados eram denominados planares. Da mesma forma o produto de três números naturais era denominado número sólido, sendo cubo o caso particular em que os três números são iguais. Em nossa linguagem matemática comum ainda guardamos essas relações, pois denominamos a^2 de "a ao quadrado" e a^3 de "a ao cubo".

Os antigos gregos também relacionavam números com figuras geométricas através de desenhos com pontos. Por exemplo, os números 1, 3, 6 e 10 correspondem, respectivamente, à quantidade de pontos nas figuras

e por isso eram denominados *números triangulares*. Evidentemente podemos continuar esta sequência de figuras e obter uma infinidade de números triangulares. A quantidade de pontos da n-ésima figura corresponde ao n-ésimo número triangular, que indicamos com a notação T_n. Dessas figuras vemos que $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, e $T_4 = 10$.

Podemos encontrar uma expressão geral para T_n. Percebemos que a n-ésima figura é obtida da anterior mediante o acréscimo de uma linha com n pontos. Começando com $T_1 = 1$ temos $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2$, depois $T_3 = T_2 + 3 = 1 + 2 + 3$, e $T_4 = T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Estas observações nos inspiram definir a sequência T_n por

$$\begin{cases} T_1 &= 1 \\ T_n &= T_{n-1} + n \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{4.1}$$

ou por

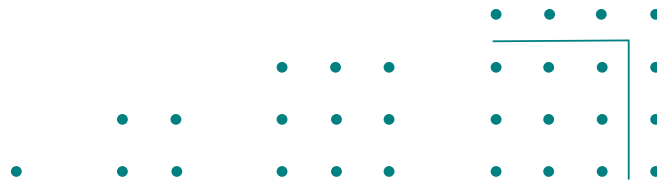
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{4.2}$$

Nesta segunda definição entendemos que se $n = 1$ a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ significa 1.

Lembrando que $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ (usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética), podemos escrever ainda

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para todo número natural } n. \tag{4.3}$$

No problema 4.4.3 abaixo o estudante é convidado a explorar as diferenças entre essas definições. A definição 4.1 chama-se *definição por recorrência*. Ela tem esse nome porque para obter o n-ésimo termo da sequência temos que recorrer ao $(n-1)$-ésimo. Já em 4.3 para obter o n-ésimo termo não necessitamos conhecer nenhum termo anterior.

A sequência dos números quadrados corresponde às figuras

Indicamos por Q_n o n-ésimo número quadrado. Portanto $Q_n = n^2$ para todo número natural n. Assim cada número Q_n corresponde a um quadrado formado por n^2 pontos.

Observando a lei de formação das figuras quadradas, notamos que cada figura é obtida da anterior mediante o acréscimo de um *gnômon*, figura da forma $\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\&&\vdots\end{smallmatrix}$ contendo $2n - 1$ pontos, conforme está sugerido no último quadrado da figura acima. Obtemos assim a definição por recorrência

$$\begin{cases} Q_1 &= 1 \\ Q_n &= Q_{n-1} + (2n-1) \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Para conferir essa fórmula podemos ver que $Q_{n-1} + (2n - 1) = (n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 = Q_n$.

Notemos as seguintes relações: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1 + 3$, $Q_3 = 1 + 3 + 5$, etc., das quais vemos que Q_n é a soma dos n primeiros números naturais ímpares:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \quad \text{para todo número natural } n.$$

Estas propriedades eram conhecidas na Escola Pitagórica (confira [44], página 44). Os pitagóricos também consideravam em suas investigações os números pentagonais, os números hexagonais, etc. Esse processo se estendia para a dimensão três, com o estudo dos números poliedrais. A riqueza de combinações encontradas nessas sequências constituíam uma ilustração do aforismo pitagórico "Tudo é Número", uma das principais ideias daquela Escola.

Figura 4.2. A Figura da esquerda é parte do celebrado quadro *Escola de Atenas*, de Rafael Sanzio, pintado de 1509 a 1510 na *Stanza della Segnatura* (Vaticano). Vemos a imagem de Pitágoras explicando sua teoria musical. O detalhe mostra a tableta com alguns símbolos musicais e o número triangular $1+2+3+4$, a sagrada *tetractys* dos pitagóricos.

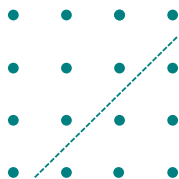
4.4 Problemas

Problema 4.4.1. Vimos no texto que a influência da Geometria na Aritmética nos levou a denominar a^2 de "a ao quadrado" em vez de "a elevado ao expoente 2". Da mesma forma chamamos a^3 de "a ao cubo" em vez de "a elevado ao expoente 3". Seguindo esse padrão qual seria o nome de a^4 ?

Problema 4.4.2. a) Seja a_1, a_2, ..., a_n uma progressão aritmética com n termos. Justifique a fórmula $a_1+a_2+\cdots+a_n = n(a_1+a_n)/2$. **b)** Explique por que $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ para todo número natural $n \geq 1$. **c)** Ache a soma $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ para todo número natural $n \geq 1$.

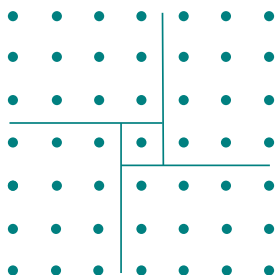
Problema 4.4.3. a) Calcule T_{20} usando *i)* a definição por recorrência 4.1; *ii)* a definição por soma 4.2, e *iii)* a definição direta 4.3. Estude detalhadamente cada um desses métodos especificando as diferenças entre eles. **b)** Calcule T_{1000} usando a forma menos dispendiosa.

Problema 4.4.4. A figura abaixo sugere uma relação geral entre números triangulares e quadrados. Descubra qual é a relação e demonstre-a usando recursos algébricos. Segundo o his-

toriador Thomas L. Heath essa relação era conhecida dos antigos gregos (confira [44], página 50).

Problema 4.4.5. Os antigos gregos chamavam de *oblongos* os números da forma $n(n+1)$ (confira [44], página 49). As figuras relacionadas com esses números são os retângulos $n \times (n+1)$. Vemos abaixo a representação do número oblongo $4 \times 5 = 20$.

Utilizando figuras de números oblongos como inspiração, obtenha uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais pares. Você fez uma indução ou uma dedução? Apresente uma demonstração algébrica da fórmula e constate sua validade para qualquer n.

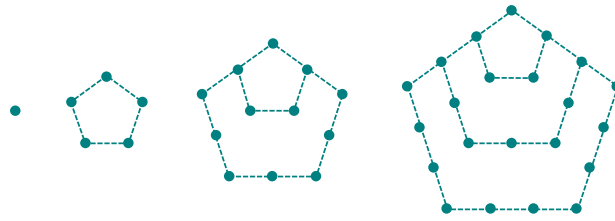
Problema 4.4.6. Através de figuras verifique como os números oblongos podem ser escritos como a soma de dois números triangulares iguais. Em seguida demonstre essa relação.

Problema 4.4.7. A figura abaixo e o problema anterior sugerem uma relação geral entre os números quadrados ímpares e números triangulares.

Descubra qual é a relação, descreva-a como uma fórmula, e demonstre-a.

Problema 4.4.8. Leonard Euler observou que se t é um número triangular então $9t+1$, $25t+3$ e $49t+6$ também são. Demonstre essas afirmações. Alguma fórmula geral?

Problema 4.4.9. Descubra uma fórmula para validar a seguinte afirmação: todo cubo n^3 de número natural $n \geq 2$ se escreve como diferença dos quadrados de dois números triangulares. Não se esqueça de demonstrar a fórmula.

Problema 4.4.10. Considere a sequência dos números pentagonais P_n descrita pelas figuras

abaixo:

Observando a lei de formação dessas figuras, confira a seguinte definição por recorrência dos números pentagonais:

$$\begin{cases} P_1 &= 1 \\ P_n &= P_{n-1} + 3n - 2 \quad \text{para } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Temos também a fórmula

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Descreva a diferença entre essas duas fórmulas. Verifique se é possível deduzir a segunda fórmula da primeira. **b)** Prove que $P_n = 2T_{n-1} + T_n$, para todo número natural $n \geq 2$.

4.5 Zero e os números naturais

Nos capítulos anteriores estudamos os números naturais 1, 2, 3, 4, ... e consideramos zero um algarismo dos sistemas posicionais, definido para designar a casa vazia em representações de números. Agora convém considerarmos zero um número natural, de modo que possamos estender as propriedades desse conjunto. Tomar zero como um número natural também facilita o desenvolvimento de fórmulas e definições.

A ideia de conjunto vazio surge quando fazemos certas operações com conjuntos. Por exemplo, dado um conjunto, retiramos dele todos os seus elementos, do que resulta um conjunto vazio. Fazendo a interseção de dois conjuntos que não têm elementos em comum, vemos que essa interseção é um conjunto vazio.

Isto nos sugere estender os números utilizados para contagem, considerando a

Definição 4.2. Designamos por *zero* a quantidade de elementos em um conjunto vazio. Indicamos o número zero com o símbolo 0.

Dessa forma zero faz parte dos números utilizados para contagem, que passam a ser: 0, 1, 2, 3, ...

Se em um conjunto vazio colocamos um objeto, temos um conjunto com um elemento. Assim $1+0=1$ ou $0+1=1$. Vemos que 1 é o sucessor de zero. Mais geralmente, se em um conjunto vazio colocamos n elementos, ficamos com n elementos no conjunto, ou seja, $0+n=n$. Por outro lado, se em um conjunto com n elementos acrescentamos elemento nenhum, continuamos com um conjunto com n elementos. Portanto $n+0=n$. Em síntese,

$$n + 0 = n = 0 + n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{4.4}$$

Em particular, $0 + 0 = 0$. Vemos também que se de um conjunto com n elementos retiramos n elementos, ficamos com um conjunto com 0 elementos, isto é,

$$n - n = 0 \quad \text{para todo número natural } n. \tag{4.5}$$

Em particular, $0 - 0 = 0$.

Vimos anteriomente que $1 \times n$ significa tomar n uma vez, $2 \times n$ significa tomar $n + n$, etc. Assim $0 \times n$ significa tomar n nenhuma vez, e o mais lógico parece ser definir $0 \times n = 0$ para todo n. Por outro lado $n \times 0$ é $0 + 0 + \ldots + 0$, resultando novamente 0. Temos assim

$$n \times 0 = 0 = 0 \times n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{4.6}$$

Em particular, $0 \times 0 = 0$.

Definição 4.3. Indicamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, incluindo o zero. Portanto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Vimos que a propriedade comutativa da adição se estende para esse novo conjunto dos números naturais, e examinando as considerações feitas na página 50 vemos que a propriedade associativa da adição também se estende para esse novo conjunto. O mesmo ocorre para as propriedades comutativa e associativa da multiplicação e para a propriedade distributiva. Vemos também que $0 < 1$ e que as propriedades de ordem dadas na seção 3.4, na página 63, se estendem para o conjunto $\mathbb{N}$.

Definição 4.4. Indicamos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais excluído o zero, denominados *números naturais positivos*. Portanto

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Já vimos que vários povos antigos usavam um símbolo para o zero com a finalidade de indicar a casa vazia em representações posicionais. Não é claro quando se iniciou a ideia de considerar zero como número. Mas isso certamente era feito na Índia a partir do Século VII por matemáticos como Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara. Em um livro de Matemática elementar Mahavira escreve que "... um número multiplicado por zero é zero, e um número permanece o mesmo quando zero é subtraído dele". Para mais informações confira [78].

Destacamos agora a seguinte propriedade, denominada *Lei da Integridade*:

Teorema 4.5. *Se a e b são números naturais tais que $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Demonstração. Vimos na definição de multiplicação, na página 65, que o produto de números naturais positivos é positivo. Portanto se a é positivo e se b é positivo, então ab é positivo. Isto implica que se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$. □

Problema resolvido 4.6. Demonstre que se a e b são números naturais tais que $ab = 1$ então $a = b = 1$.

Solução. Se fosse $a = 0$ ou $b = 0$ teríamos $ab = 0$. Portanto $a \geq 1$ e $b \geq 1$. Se fosse $a > 1$ aplicaríamos a propriedade da compatibilidade entre a ordem e a multiplicação (página 64) e teríamos $a \cdot b > 1 \cdot b$. Isto implicaria $ab > 1$, o que não é possível. Portanto $a = 1$. De $ab = 1$ e $a = 1$ temos $b = 1$. Isto termina a demonstração. □

4.6 Problemas

Resolva os problemas desta seção usando exclusivamente os conceitos e propriedades das operações aritméticas vistos no Capítulo 3 e os resultados da seção anterior.

Problema 4.6.1. Demonstre que se a e b são números naturais tais que $a + b = a$ então $b = 0$.

Problema 4.6.2. Verifique que a propriedade "$n \times 0 = 0 = 0 \times n$ para todo número natural n" referida no texto pode ser deduzida de outras propriedades já vistas.

Problema 4.6.3. Demonstre que se a, b e c são números naturais tais que $b \leq a$ então $c(a - b) = ca - cb$.

Problema 4.6.4. Sejam a, b e c números naturais tais que $b \geq c$ e $a \geq b - c$. Prove que $a - (b - c) = (a + c) - b$.

Problema 4.6.5. Demonstre que existe um único antecessor de 1, ou seja, é único o número 0 tal que $0 + 1 = 1$.

Problema 4.6.6. Demonstre que, para todo número natural a, se $a^2 = a$ então $a = 0$ ou $a = 1$.

Problema 4.6.7. (Lei do Cancelamento da Multiplicação) Demonstre que se a, b e c são números naturais tais que $c \neq 0$ e $ac = bc$, então $a = b$.

Problema 4.6.8. Verifique que se $a = 0$ ou $b = 1$ então $ab = a$. Demonstre a afirmação recíproca: se a e b são números naturais tais que $ab = a$ então $a = 0$ ou $b = 1$. Qual é a afirmação negativa dessa recíproca? Ela também é verdadeira?

4.7 Par e ímpar

Ludere par impar.[3]

É muito antiga a classificação dos números naturais em pares e ímpares e o uso dessa ideia nas mais diversas situações. Perde-se na noite dos tempos a origem do jogo de adivinhação *par ou ímpar?* com o uso de contas ou dos dedos das mãos. Na Antiga Grécia a Escola Pitagórica incluía a classificação dos números em pares e ímpares em sua cosmogonia numerológica. Atribuíam aos números pares qualidades femininas, e aos ímpares, qualidades masculinas. Nicômaco escreveu, por volta do ano 100, que os pitagóricos definiam número par como aquele que pode ser repartido em duas partes iguais, e os números ímpares como aqueles que não podem ([44], pág. 39).

Para dividir um número natural n por 2 podemos agrupar duas a duas as unidades de n. Apenas um dos dois casos seguintes pode ocorrer: 1º) todas as unidades de n são agrupadas duas a duas; 2º) todas as unidades menos uma são agrupadas duas a duas. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 8 &= (1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) \\ 9 &= (1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) + 1 \end{aligned}$$

[3] "Jogar par e ímpar". Horácio. Adaptado de [103], página 16.

Assim, $8 = 2 \cdot 4$ e $9 = 2 \cdot 4 + 1$.

Portanto, dado um número natural n qualquer, temos $n = 2q$ ou $n = 2q + 1$ para algum número natural q. O número natural q é a quantidade de grupos de duas unidades, e é designado por *quociente*. Se $n = 2q$, dizemos que 0 é o resto da divisão de n por 2, e se $n = 2q + 1$, o resto é 1. No caso em que $n = 0$, temos $n = 2 \cdot 0$, portanto 0 é da forma $0 = 2q$, e o resto da divisão de 0 por 2 é 0.

Em síntese, temos o

Teorema 4.7. *Todo número natural n se escreve em uma e apenas uma das formas*

$$n = 2q \quad ou \quad n = 2q + 1$$

sendo q um número natural.

Os números naturais da forma $2q$, sendo q um número natural, são chamados *múltiplos de 2*. Os números naturais da forma $2q + 1$ não são múltiplos de 2. Temos também a

Definição 4.8. Chamamos de *par* a todo número natural da forma $2q$ para algum número natural q, isto é, a números que têm resto zero quando divididos por 2. Chamamos de *ímpar* a todo número natural da forma $2q + 1$ para algum número natural q, isto é, a números que têm resto 1 quando divididos por 2.

Portanto, o conjunto dos números naturais fica particionado em dois subconjuntos disjuntos: os pares e os ímpares, chamados *classes de restos de dois* ou de *classes módulo dois*.

Figura 4.3. Foto de estátua de Nicômaco de Gerasa, situada na cidade de Nuremberg, Alemanha. Nicômaco é autor da obra *Introdução à Aritmética*, escrita por volta do ano 100, em que aborda os números pares e ímpares, os primos, os compostos e os números perfeitos e amigos. Apresenta descrição algébrica dos resultados, desvinculando a Teoria dos Números da Geometria.

Definição 4.9. Dizemos que os números naturais a e b *têm a mesma paridade* se forem ambos pares ou ambos ímpares. Caso contrário, dizemos que *têm paridade oposta*.

Em outros termos, dizemos que dois números naturais têm a mesma paridade se estiverem na mesma classe módulo dois, e que têm paridade oposta se estiverem em classes diferentes. Por exemplo, 21 e 29 têm a mesma paridade, assim como 32 e 54. Mas 35 e 42 têm paridade oposta.

Podemos observar diversas propriedades dos números pares e ímpares. Por exemplo, $6+12 = 18$, $8 + 34 = 42$, etc. o que parece indicar que a soma de dois números naturais pares é sempre par. Também parece ser sempre par a soma de dois números naturais ímpares, como atestam os exemplos $7 + 9 = 16$, $13 + 19 = 32$. Por outro lado, $8 + 13 = 21$, $18 + 35 = 53$, etc. o que parece indicar que a soma de um par com um ímpar é sempre ímpar. Usando notação algébrica obtemos resultados gerais, conforme a

Proposição 4.10. *A soma (ou diferença) de dois números naturais de mesma paridade é par. A soma (ou diferença) de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.*

Demonstração. Vejamos as afirmações sobre a soma (sobre a diferença fica como exercício para o estudante no Problema 4.8.2). Sejam a e b números naturais de mesma paridade. Suponhamos primeiro que sejam ambos pares. Então existem números naturais n e m tais que $a = 2n$ e $b = 2m$. Temos $a + b = 2n + 2m = 2(n + m) = 2t$, com $t = n + m$. Como t é um número natural, segue que $a + b$ é par. Suponhamos agora que a e b sejam ambos ímpares. Podemos escrever $a = 2n + 1$ e $b = 2m + 1$, sendo n e m números naturais. Então $a+b = 2n+1+2m+1 = 2(n+m+1) = 2t$, com $t = n+m+1$. Como t é um número natural, segue que $a + b$ é par. Portanto a soma de dois números de mesma paridade é par.

Sejam agora a e b números naturais de paridade oposta. Sem perda de generalidade podemos supor que a é par e b ímpar. Então existem números naturais n e m tais que $a = 2n$ e $b = 2m+1$. Assim $a + b = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$, e $a + b$ é ímpar. Portanto a soma de dois números de paridade oposta é ímpar. □

Consideremos uma tabela dos números pares e ímpares representados no sistema decimal:

pares	ímpares
0	1
2	3
4	5
6	7
8	9
10	11
12	13
14	15
16	17
18	19
20	21

Podemos notar várias propriedades. Por exemplo, um número e seu quadrado parecem estar sempre na mesma classe. Para confirmar fazemos a

Proposição 4.11. *Todo número natural e seu quadrado têm a mesma paridade. Em outros termos, todo número natural e seu quadrado estão na mesma classe módulo dois.*

Demonstração. De fato, se $n = 2q + 1$, então $n^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1 = 2l + 1$, sendo l um número natural. Portanto, se n é ímpar, n^2 também o é. Por outro lado, se $n = 2q$, então $n^2 = 4q^2 = 2(2q^2) = 2l$. Em consequência, se n é par, n^2 também é par.

Reciprocamente, se n^2 é par, então n não pode ser ímpar, pois se o fosse n^2 seria ímpar, em virtude da conclusão acima. Portanto se n^2 é par então n é par. Por outro lado, se n^2 é ímpar, então n não pode ser par, pois se o fosse n^2 seria par, em virtude da conclusão acima. Portanto se n^2 é ímpar então n é ímpar □

Definição 4.12. Um número natural diz-se ser um *quadrado perfeito* se for quadrado de um número natural.

Por exemplo, 16 é um quadrado perfeito, pois $16 = 4^2$.

A Proposição 4.11 pode ser enunciada da seguinte forma: *Todo quadrado perfeito e sua raiz quadrada têm a mesma paridade.*

Observando novamente a tabela acima de pares e ímpares, notamos outra propriedade, bastante conhecida:

Proposição 4.13. *O número natural n é par quando o dígito das unidades de sua representação decimal é par.*

Esta propriedade chama-se *critério de divisibilidade por* 2. O que mais nos chama a atenção neste critério é sua utilidade e simplicidade de aplicação. Assim, para sabermos que o número 938 740 816 é par, não é necessário dividi-lo por 2. Basta olhar para o dígito das unidades.

Demonstração. Para demonstrar o critério de divisibilidade por 2, vamos primeiro enunciá-lo da seguinte forma:

$$n = (a_m \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}} \text{ é par se e somente se } a_0 \text{ é par.}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} n &= a_m 10^m + \ldots + a_1 10 + a_0 \\ &= 2a + a_0 \end{aligned}$$

para um certo número natural a. Assim, se n é par, $a_0 = n - 2a$ também é par, como diferença de dois pares. Reciprocamente, se a_0 é par, então $n = 2a + a_0$ é par, como soma de dois pares. Isto demonstra o critério. □

Uma consequência do critério acima é que $n = (a_m \ldots a_0)_{\text{dez}}$ é ímpar se e somente se a_0 é ímpar.

O conceito de par e ímpar pode ser utilizado para resolver problemas que dependem dessa partição do conjunto dos naturais. Por exemplo,

Problema resolvido 4.14. (confira [112], pág. 11) Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Solução. Não é possível. Fixemos um dos soldados. Seus 99 companheiros podem formar 49 grupos de dois soldados, e sobra 1, pois $99 = 2 \times 49 + 1$. Assim em 49 noites o soldado fixado pode ficar de sentinela com dois companheiros, sendo sempre companheiros diferentes. Mas na 50ª noite esse companheiro que sobrou vai ter que se juntar a outro que já fez sentinela com o soldado fixado inicialmente. □

Problema resolvido 4.15. (confira [112], pág. 14) Um tabuleiro de xadrez 6×6 está coberto com dominós 2×1 (confira definição de tabuleiro de xadrez no Problema 4.8.19 abaixo). Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó, qualquer que seja a distribução dos dominós.

Solução. As retas que separam as casas do tabuleiro são horizontais ou verticais, e são em número de 10. Mostraremos primeiro que se uma reta que separa casas do tabuleiro corta um dominó, então corta pelo menos dois. De fato, digamos que uma dessas retas corta exatamente um dominó. Então de um dos lados da reta existem n dominós inteiros e mais $1/2$ dominó. Portanto desse lado da reta existem $2n+1$ casas do tabuleiro. Mas isso não é possível, pois essa parte do tabuleiro é formada por linhas (ou colunas) completas com 6 casas cada, assim tem um número par de casas. Portanto, se cada uma das 10 retas que separam casas do tabuleiro corta um dominó, então cada uma dessas retas corta pelo menos dois dominós, todos diferentes. Assim essas 10 retas determinam 20 dominós, pelo menos. Mas, como o tabuleiro tem 36 casas, existem 18 dominós cobrindo todas as casas. Temos assim uma contradição, advinda do fato de termos admitido que todas as 10 retas cortam algum dominó. Em consequência pelo menos uma das 10 retas não corta dominó algum. □

Usamos divisão por 2 para classificar os números naturais em pares e ímpares. O que ocorre se usarmos divisão por 3? Dado n, repartimos suas unidades na maior quantidade possível de

grupos de três unidades. Os restos possíveis são: 0 ou 1 ou 2. Portanto, todo número natural n é de uma e apenas uma das seguintes formas:

$$n = 3q \quad \text{ou} \quad n = 3q + 1 \quad \text{ou} \quad n = 3q + 2$$

para algum número natural q.

Dessa forma o conjunto dos números naturais se particiona nos três subconjuntos seguintes, chamados *classes de restos de três* ou *classes módulo três*:

resto zero	resto um	resto dois
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20
21	22	23
24	25	26
⋮	⋮	⋮

Na primeira coluna estão os números que têm resto zero quando divididos por três. Dizemos que esses números são *múltiplos de 3*. Na segunda coluna, os que têm resto um, e na terceira, resto dois.

Existem, como vimos, duas classes de números naturais módulo dois: os pares e os ímpares. A literatura matemática não consagrou nomes para as classes módulo três. A turma de 1995 do Curso de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) sugeriu a seguinte nomenclatura:

ter	(para números da forma $3q$)
ínter	(para números da forma $3q + 1$)
alter	(para números da forma $3q + 2$)

Podemos usar as classes módulo três para demonstrar propriedades relacionadas com essa partição. Por exemplo,

Problema resolvido 4.16. Dados três números naturais consecutivos quaisquer, exatamente um deles é múltiplo de 3.

1ª solução. Sejam a, $a + 1$ e $a + 2$ números naturais consecutivos. A situação nos sugere considerar classes módulo três. Como a está em exatamente uma dessas classes, temos três casos a considerar: *i)* $a = 3q$, ou *ii)* $a = 3q + 1$, ou *iii)* $a = 3q + 2$, para algum número natural q. Devemos examinar o que ocorre em cada um dos casos. Vejamos.

i) $a = 3q$ para algum número natural q. Então $a + 1 = 3q + 1$ e $a + 2 = 3q + 2$. Portanto a é múltiplo de 3 e $a + 1$ e $a + 2$ não são.

ii) $a = 3q + 1$ para algum número natural q. Então $a + 1 = 3q + 2$ e $a + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1)$. Portanto $a + 2$ é múltiplo de 3 e a e $a + 1$ não são.

iii) $a = 3q + 2$ para algum número natural q. Então $a + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1)$ e $a + 2 = 3q + 4 = 3(q + 1) + 1$. Portanto $a + 1$ é múltiplo de 3 e a e $a + 2$ não são.

2ª solução. Os múltiplos de 3 são 3, 6, 9, ..., e formam assim uma progressão aritmética de razão 3. Dados dois números consecutivos $3q$ e $3(q+1) = 3q+3$ dessa sequência, vemos que entre eles existem apenas dois números naturais, a saber, $3q+1$ e $3q+2$. Portanto, dados três números naturais consecutivos, exatamente um deles pertence à referida progressão. □

Problema resolvido 4.17. Mostre que m é múltiplo de 3 se e somente se m^2 também é múltiplo de 3.

Solução. Se m é múltiplo de 3 então m se escreve na forma $m = 3k$ para algum número natural k. Portanto $m^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$ também é múltiplo de 3.

Vejamos a recíproca. Suponhamos que m^2 seja múltiplo de 3. O número m pertence a uma das classes módulo três. Portanto temos três possibilidades: $m = 3q$ ou $m = 3q+1$ ou $m = 3q+2$, para algum número natural q. Se m é da forma $m = 3q+1$, então $m^2 = (3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$, e m^2 não é múltiplo de 3. Por outro lado, se m é da forma $m = 3q+2$, então $m^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$, e m^2 novamente não é múltiplo de 3. Constatamos assim que m não pode ser da forma $3q+1$ e nem $3q+2$. Só resta a possibilidade de que $m = 3q$, e assim m deve ser múltiplo de 3. □

De modo análogo ao que fizemos para 2 e 3 podemos considerar as *classes de restos de quatro* ou as *classes módulo quatro*. Dividindo um número natural por 4, os restos possíveis são 0 ou 1 ou 2 ou 3. Dessa forma o conjunto dos números naturais fica particionado em quatro subconjuntos disjuntos: o primeiro formado pelos números da forma $n = 4q$, o segundo pelos números da forma $n = 4q+1$, o terceiro pelos números da forma $n = 4q+2$ e o quarto pelos números da forma $n = 4q+3$.

Se o resto da divisão de um número natural por 4 for zero, dizemos que o número é *múltiplo de 4*.

E assim sucessivamente podemos considerar classes módulo m para todo número natural $m \geq 2$. Esse conceito é a base da maioria das técnicas de investigação na Teoria dos Números.

4.8 Problemas

Problema 4.8.1. Foi escrito no texto que os pitagóricos definiam número par como aquele que pode ser repartido em duas partes iguais, e os números ímpares como aqueles que não podem. Essa definição coincide com a atual Definição 4.8? Podem-se deduzir as mesmas propriedades de ambas as definições?

Problema 4.8.2. Explique por que a diferença de dois números naturais de mesma paridade é par. Justifique ainda por que a diferença de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.

Problema 4.8.3. Explique por que se um número natural é par, seu sucessor é ímpar, e vice-versa.

Problema 4.8.4. Sejam n_1, n_2, ..., n_s números naturais que podem ser todos pares, ou apenas alguns, ou nenhum. Qual é a paridade da soma $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$?

Problema 4.8.5. Verifique se é par ou ímpar, e justifique: **a)** o produto de dois números naturais de mesma paridade; **b)** o produto de dois números naturais de paridade oposta; **c)** o produto de s números naturais pares; **d)** o produto de s números naturais ímpares. **e)** o produto de s números naturais, sendo alguns deles pares e os outros ímpares.

Problema 4.8.6. Explique por que, qualquer que seja o número natural n, ele e seu cubo têm a mesma paridade.

Problema 4.8.7. Explique por que, se n^2 é múltiplo de 3, também é múltiplo de 9, isto é, se escreve na forma $9q$ para algum número natural q.

Problema 4.8.8. Observe regularidades nos seguintes eventos:

$$1 \cdot 5 = 5, \ \ 3 \cdot 5 = 15, \ \ 5 \cdot 5 = 25, \ \ 7 \cdot 5 = 35, \ \ 9 \cdot 5 = 55, \ \ 11 \cdot 5 = 55, ...$$

Faça conjecturas que sejam verdadeiras (pelo menos duas).

Problema 4.8.9. Sejam n_1, n_2, ..., n_s números naturais representados no sistema decimal. Explique por que para que o produto $n_1 n_2 \cdots n_s$ termine em 5 é necessário e suficiente que pelo menos um dos números termine em 5 e todos os outros sejam ímpares.

Solução. Vamos mostrar primeiro que a condição dada é suficiente. Suponhamos que pelo menos um dos números termine em 5 e todos os outros sejam ímpares. Sem perda de generalidade podemos supor que n_1 termina em 5 e os outros são ímpares. Então o produto $n_2 n_3 \cdots n_s$ é ímpar, digamos $2k+1$. Podemos escrever $n_1 = 10q+5$. Logo $n_1 n_2 \cdots n_s = (10q+5)(2k+1) = 20qk + 10q + 10k + 5 = 10l + 5$. Nesse número os dígitos de $10l$ estão na segunda casa para cima, de modo que $10l + 5$ termina em 5.

Para mostrar que a condição é necessária vamos proceder por contradição. Isto é, supomos que a condição não está satisfeita e que isso implica que o número não termina em 5. Observe que a condição tem duas partes ligadas por "e". Portanto para negar a condição precisamos negar cada parte por sua vez. Temos assim dois casos:

Caso 1 Nem todos os números dados são ímpares. Então pelo menos um deles é par, de modo que o produto $n_1 n_2 \cdots n_s$ é par, portanto não termina em 5.

ou

Caso 2 Nenhum dos números n_1, n_2, ..., n_s termina em 5. Logo esses números terminam em 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9. O dígito da unidade do produto $n_1 n_2 \cdots n_s$ é igual ao dígito da unidade dos produtos desses algarismos. Mas, examinando uma tábua de multiplicação se vê que nenhum produto desses algarismos termina em 5.

Fica provado que a condição é necessária. □

Problema 4.8.10. Sejam n_1, n_2, ..., n_s números naturais representados no sistema decimal. Determine (e justifique) condições necessárias e suficientes para que aquele produto termine em zero.

Problema 4.8.11. Justifique por que, quaisquer que sejam os números naturais a e b, se a é ímpar então b e ab têm a mesma paridade. E se a for par?

Problema 4.8.12. Explique por que o produto de três números naturais consecutivos quaisquer é múltiplo de 3. E quanto à soma?

Problema 4.8.13. Verifique se é par ou ímpar a diferença de dois números cúbicos consecutivos quaisquer. Justifique. Um número chama-se *cúbico* quando é da forma n^3 para algum número natural n.

Problema 4.8.14. Verifique a paridade de $(100)_{três}$ (verificar a paridade significa ver se é par ou ímpar).

Problema 4.8.15. Em um livro o autor pede para provar que se a é ímpar e múltiplo de 3 então $a^2 - 1$ é múltiplo de 4. Verifique que uma das hipóteses sobre a não é necessária para a validade da afirmação.

Problema 4.8.16. Determine a forma geral dos números naturais que são ao mesmo tempo ímpares e múltiplos de 3. E quanto aos pares múltiplos de 3?

Problema 4.8.17. Dizemos que um número natural a é múltiplo de 8 quando ele se escreve na forma $a = 8q$ para algum número natural q. Encontre condições necessárias e suficientes sobre o número natural n para que $n^2 - 1$ seja múltiplo de 8.

Problema 4.8.18. Determine o dígito da unidade do número

$$N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2007$$

produto dos ímpares de 1 a 2007.

Problema 4.8.19. Um *tabuleiro retangular de xadrez* $m \times n$ consiste de um retângulo $m \times n$ quadriculado por mn quadrados, chamados *casas*, pintados de branco e preto alternadamente nos sentidos vertical e horizontal. Um dia alguém mostrou a um estudante de Matemática um grande tabuleiro de xadrez, e afirmou: — aqui existem 484 casas. Olhando para o tabuleiro, e sem contar nada, o estudante replicou prontamente: — aqui não existem 484 casas. O que o estudante pode ter visualizado no tabuleiro que o levou a fazer essa afirmação tão prontamente?

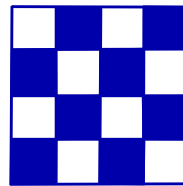



Figura 4.4. Tabuleiro de xadrez 4×4.

Problema 4.8.20. Explique por que para todo número natural n exatamente um dos números n, $n + 2$ ou $n + 4$ é múltiplo de 3.

Problema 4.8.21. Dados cinco números naturais quaisquer, sempre é possível escolher, dentre eles, três números cuja soma seja múltiplo de 3.

Problema 4.8.22. Investigue propriedades das classes módulo três. Faça afirmações gerais e justifique. Exemplos: O produto de dois números da mesma classe permanece nesta classe? Todo número natural e seu quadrado estão na mesma classe módulo três? Em que classes módulo três estão os quadrados perfeitos? Em que classes módulo três estão os números da forma $111\ldots1$ (n 1's)?

Problema 4.8.23. Foi provado que o produto de dois ímpares é ímpar. Explique por que isso implica a seguinte afirmação: "Se 2 é fator do produto ab então 2 é fator de a ou de b". Mostre que essa afirmação também vale para 3, isto é: "Se 3 é fator do produto ab então 3 é fator de a ou de b".

Problema 4.8.24. Investigue propriedades das classes módulo quatro. Faça afirmações gerais e justifique. Em que classes módulo quatro estão os quadrados perfeitos? Em que classes módulo quatro estão os números da forma $111\ldots1$ (n 1's)?

Problema 4.8.25. Construa uma tabela mostrando a partição do conjunto dos números naturais em classes módulo cinco. Observe por inspeção da tabela em que classes estão as potências quárticas dos números naturais. Faça uma conjectura geral e demonstre.

Problema 4.8.26. Em um jogo, dado um número natural n é permitido realizar com ele uma das seguintes operações: *i)* substituí-lo pela sua metade se for par; *ii)* se o número for maior do que 1, subtrair 2 e substituí-lo pelo resultado.
a) Iniciando com um número natural n e aplicando sucessivamente o procedimento *i)* acima tantas vezes quantas for possível, para que valores de n se pode obter zero como valor final?
b) Mesma pergunta, mas agora com o procedimento *ii)*.

4.9 Análise dos números naturais

A *análise* é um recurso de investigação classificado pela teoria do conhecimento como um método que estuda os fenômenos decompondo-os em suas partes fundamentais, verificando como são construídos pela combinação dessas partes e examinando as relações entre os fenômenos através das interações entre essas partes.

Essa mesma ideia é aplicada no estudo dos números naturais. Analisamos os números naturais decompondo-os através da divisão. Esse método deu origem à Teoria dos Números, iniciada por Pitágoras por volta de 500 a. C.

Observando a decomposição dos números naturais como produto de números > 1, vemos que alguns números podem assim se decompor, outros não. Os antigos gregos chamavam os primeiros de *planares*, e os outros de *retilíneos*. Hoje os denominamos respectivamente *números compostos* e *números primos*[4].

Exemplos de números compostos:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 6 \\ 15 &= 3 \times 5 \\ 117 &= 9 \times 13 \\ 392 &= 7 \times 56 \\ 539 &= 11 \times 49 \\ 2\,263\,261 &= 323 \times 7007 \end{aligned}$$

Exemplos de números que não conseguimos decompor, portanto são primos:

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 503 \quad 809$$

Convém formalizar algumas definições.

Definição 4.18. Um número natural a se diz *múltiplo* de um número natural b se existir um número natural q tal que $a = bq$. Nesse caso dizemos que b é *fator* de a. Se $b \neq 0$, dizemos ainda que b *divide* a ou que b é *divisor* de a.

Lembramos que o termo *divisor* faz parte da nomenclatura da operação de divisão com outro significado. Mas mantemos esse sentido duplo em respeito à tradição, esperando que o contexto deixe claro de que sentido se trata.

Observamos que todo número natural a é múltiplo de si mesmo e de 1, pois $a = 1 \cdot a$. Observamos ainda que 0 é múltiplo de qualquer número natural a, pois $0 = 0 \cdot a$, e que qualquer número natural $a \neq 0$ é divisor de 0.

[4] Do latim *primu*, que significa primeiro.

Definição 4.19. Denominamos *primo* a todo número natural > 1 que não tem fator diferente de 1 e dele mesmo. Chamamos de *composto* a todo número natural > 1 que tem fator diferente de 1 e dele mesmo.

Observamos para os estudantes que já estudaram os números inteiros que, nesse ponto de nossos estudos, todos os fatores considerados são números naturais. Veremos os inteiros no Capítulo 9, quando consideraremos também fatores negativos.

O número 1 não é composto e nem primo, assim como zero. Excluímos a unidade do conjunto de números primos por conveniência. Um dos motivos é o seguinte. Se desejamos afirmar que 6 se escreve de maneira única como produto de primos na forma $6 = 2 \times 3$ (desconsiderando a ordem do fatores), essa afirmação é possível graças ao fato de que 1 não é primo. Se o fosse, teríamos que considerar também as possibilidades $6 = 1 \times 2 \times 3$, $6 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$, etc, o que seria bastante incômodo.

Uma propriedade simples mas importante é a seguinte:

Proposição 4.20. *Dados números naturais a, b e c, se a é múltiplo de b e se b é múltiplo de c, então a é múltiplo de c.*

Demonstração. Existem números naturais q e t tais que $a = bq$ e $b = ct$. Portanto $a = bq = (ct)q = c(tq)$, e vemos que a é múltiplo de c. □

Usando a nomenclatura da Definição 4.18 podemos reescrever o enunciado da Proposição 4.20 da seguinte forma: se a, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ são números naturais tais que c divide b e b divide a, então c divide a.

Outra propriedade que convém destacar é a seguinte:

Proposição 4.21. *Dados números naturais a, b e c, se b e c são múltiplos de a, então, quaisquer que sejam os números naturais x e y, temos que $xb \pm yc$ é múltiplo de a.*

Demonstração. Existem números naturais q e t tais que $b = qa$ e $c = ta$. Portanto $xb \pm yc = xqa \pm yta = (xq \pm yt)a$, e vemos que $xb \pm yc$ é múltiplo de a. □

Dados números naturais b e c, uma *combinação linear* de b e c é um número natural da forma $xb \pm yc$, sendo x e y números naturais. Tendo isso em vista podemos reescrever o enunciado da proposição acima da seguinte forma: se dois números naturais são múltiplos de um número natural a, então qualquer combinação linear desses números também é múltiplo de a. Ou então, se $a \neq 0$, podemos também enunciar: se a divide b e c então a divide qualquer combinação linear de b e c.

No estudo dos números naturais através de sua decomposição como produto de números naturais, um dos primeiros fatos que nos chama a atenção é que podemos decompor os números em uma sequência de produtos até obter unicamente fatores primos. Exemplos de decomposição de alguns números:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \times 3 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7007 &= 7 \times 1001 \\ &= 7 \times 7 \times 143 \\ &= 7 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30039 &= 3 \times 10013 \\ &= 3 \times 17 \times 589 \\ &= 3 \times 17 \times 19 \times 31 \end{aligned}$$

Vemos assim que os números primos são os elementos mínimos da estrutura multiplicativa dos números naturais. Mais exatamente temos o

Teorema 4.22. *Todo número natural ≥ 2 é primo ou se escreve como produto de primos.*

Demonstração. Seja $n \geq 2$ um número natural e seja p_1 o menor dos fatores $\neq 1$ de n. Então p_1 é primo porque, se não o fosse, p_1 teria um fator q com $1 < q < p_1$, e q seria também um fator $\neq 1$ de n, contrariando ser p_1 o menor deles. Ponhamos $n = p_1 n_1$, e notemos que $1 \leq n_1 < n$. Se $n_1 = 1$ então n é primo e terminamos. Se $n_1 > 1$, decompomos n_1 de forma análoga, e escrevemos $n_1 = p_2 n_2$, com p_2 primo e $1 \leq n_2 < n_1$. Temos $n = p_1 p_2 n_2$. Se $n_2 = 1$, terminamos. Se $n_2 > 1$, repetimos o procedimento decompondo-o de forma análoga. Prosseguindo, obtemos números primos p_1, p_2, ..., p_i, ... e uma sequência decrescente de números naturais $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots \geq 1$ tais que $n = p_1 p_2 \ldots p_i n_i$, continuando com a decomposição sempre que $n_i > 1$. Como de 1 a n existe uma quantidade finita de números naturais, o procedimento acima tem um último passo no qual se obtém $n_k = 1$, e ficamos com um produto $n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$, em que cada p_i é primo. □

Uma consequência imediata mas importante é o

Escólio 4.23. *Todo número natural ≥ 2 é múltiplo de (pelo menos) um número primo.*

Em outros termos, todo número natural > 1 tem fator primo (se o número é primo, esse fator é ele mesmo). A justificativa desta afirmação está contida na demonstração do Teorema acima: o menor fator > 1 de qualquer número natural é sempre primo.

Definição 4.24. Seja n um número natural composto. Denominamos *decomposição em fatores primos* de n a um produto $n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_s$ em que cada p_i é um número primo.

É possível que alguns desses primos, ou mesmo todos, apareçam mais de uma vez na decomposição. Por exemplo, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Para condensar essa representação podemos escrever $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

Essas descobertas sobre os números naturais, feitas pela Escola Pitagórica, trouxeram importantes perguntas que determinaram o desenvolvimento posterior da Teoria dos Números. Algumas dessas perguntas são:

1. A quantidade de números primos é finita ou infinita?
2. Como testar a primaridade de um número? (testar a primaridade de um número significa verificar se o número é primo ou não.)
3. Como produzir uma lista dos números primos da forma mais rápida e cômoda possível?
4. Dado um número composto, como encontrar seus fatores primos?
5. A decomposição de um número natural $n \geq 2$ como produto de fatores primos é única?
6. A sequência dos números primos tem uma regra de formação que possa facilitar sua obtenção? Existe uma fórmula adequada que forneça o n-ésimo número primo?

Alguns desses problemas podem se tornar muito complicados se observarmos que necessitamos de um método que possa resolvê-los com recursos limitados. Por exemplo, se um método vai gastar 100 anos para testar se um dado número (de bom tamanho) é ou não primo, então esse método pode não servir para muitos propósitos.

Vamos trabalhar com essas questões nos próximos capítulos, em que daremos continuidade aos nossos estudos sobre números primos e compostos. Nesse ponto advertimos o estudante interessado de que para prosseguir seus estudos em Teoria dos Números é necessário observar silenciosamente os números, assim como o estudo da Astronomia exige a observação prolongada dos céus (confira [54], página xiv).

Problema resolvido 4.25. Se a e b são números naturais tais que a é múltiplo de b e $a < b$ então $a = 0$. De forma equivalente temos: se a e b são números naturais tais que a é múltiplo de b e $a > 0$ então $b \leq a$.

Solução. Como a é múltiplo de b existe um número natural q tal que $a = bq$. Se fosse $q \geq 1$ teríamos $b \cdot q \geq b \cdot 1 \Rightarrow a \geq b$, o que é uma contradição com a hipótese de que $a < b$. Portanto $q = 0$ e segue que $a = 0$. Outra forma de escrever: se $a > 0$ é múltiplo de b existe um número natural q tal que $a = bq$. Não podemos ter $q = 0$, pois $a > 0$. Então $q \geq 1$. Multiplicando por b ambos os lados dessa desiguladade vem $bq \geq b$, o que implica $a \geq b$. □

Problema resolvido 4.26. Demonstre que se $m > 1$ é um número natural que não é múltiplo de 3 então $m^2 + 2$ é composto.

Solução. Um número natural $m > 1$ que não é múltiplo de 3 é de uma das seguintes formas: $m = 3q + 1$ para algum número natural $q > 0$, ou $m = 3q + 2$ para algum número natural $q \geq 0$. Se $m = 3q + 1$ então $m^2 + 2 = (3q + 1)^2 + 2 = 9q^2 + 6q + 3 = 3(3q^2 + 2q + 1)$. Como $q > 0$ vemos que $3q^2 + 2q + 1 > 1$, e assim $m^2 + 2$ é produto de dois números naturais > 1. Portanto $m^2 + 2$ é composto. Por outro lado, se $m = 3q + 2$ então $m^2 + 2 = (3q + 2)^2 + 2 = 9q^2 + 12q + 6 = 3(3q^2 + 4q + 2)$, e $m^2 + 2$ novamente é produto de dois números naturais > 1, logo é composto. □

Problema resolvido 4.27. Demonstre que todo número natural da forma $3n + 2$ tem um fator primo também desta forma.

Solução. Se $3n + 2$ for primo nada há a demonstrar. Se não for, o Teorema 4.22 garante que $3n + 2$ é um produto de primos. Nenhum desses primos é 3, pois 3 não é fator de $3n + 2$. Portanto, esses primos são da forma $3t+1$ ou $3t+2$. Se todos fossem da forma $3t+1$, o resultado do Problema 4.10.12 proposto logo abaixo garante que seu produto também seria da mesma forma, mas não é. Portanto pelo menos um dos primos que comparecem na decomposição de $3n + 2$ é dessa forma. □

Problema resolvido 4.28. Encontre todos os primos p tais que $3p+1$ é um quadrado perfeito.

1ª solução. Seja $3p + 1 = a^2$, sendo a um número natural e p um primo. Temos $3p = (a-1)(a+1)$, portanto $3p$ é produto dos números naturais $a-1$ e $a+1$. Mas $3p$ se escreve como um produto de dois números naturais das seguintes maneiras:
1ª maneira: $(1)\cdot(3p)$ Temos $a-1=1$ e $a+1=3p$, o que não é possível, pois isso implica $a=2$ e $p=1$.
2ª maneira: $(3p)\cdot(1)$ Temos $a-1=3p$ e $a+1=1$, o que implica $a=0$, o que não é possível.
3ª maneira: $(3)\cdot(p)$ Temos $a-1=3$ e $a+1=p$, o que implica $a=4$ e $p=5$, que é uma solução possível.
4ª maneira: $(p)\cdot(3)$ Temos $a-1=p$ e $a+1=3$, o que implica $a=2$ e $p=1$, o que novamente não é possível.

Resposta: $p=5$ é a única solução possível.

2ª solução. Escrevendo $3p+1=a^2$, lembramos que a está em uma das classes módulo três. Temos assim três casos a considerar:
1º caso: $a=3k$ para algum número natural k. Então $3p+1=9k^2$, o que não é possível, pois $9k^2$ é múltiplo de 3 mas $3p+1$ não é.
2º caso: $a=3k+1$ para algum número natural k. Então $3p+1=(3k+1)^2=9k^2+6k+1 \Rightarrow 3p=9k^2+6k \Rightarrow p=3k^2+2k=k(3k+2)$. Como p é primo e $3k+2>1$ vem que $k=1 \Rightarrow p=5$, que é uma solução possível.
3º caso: $a=3k+2$ para algum número natural k. Então $3p+1=(3k+2)^2=9k^2+12k+4 \Rightarrow 3p=9k^2+12k+3 \Rightarrow p=3k^2+4k+1=(k+1)(3k+1)$. Como p é primo segue $k+1=1$ ou $3k+1=1 \Rightarrow k=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow p=1$, o que não é possível.

Novamente a resposta é: $p=5$ é a única solução possível.

3ª solução. Escrevendo $3p+1=a^2$, temos $3p=(a-1)(a+1)$. Observamos que os números $a-1$, a e $a+1$ são consecutivos, e assim um deles é múltiplo de 3. Temos três possibilidades:
1ª possibilidade: $a-1=3k$. Então $3p=3k(a+1) \Rightarrow p=k(a+1) \Rightarrow k=1$ ou $a+1=1 \Rightarrow a=4$ ou $a=0$. Se $a=4$ temos $p=5$, que é uma solução possível. $a=0$ não é possível
2ª possibilidade: $a=3k$. Então $3p=(a-1)(a+1)=(3k-1)(3k+1)=9k^2-1$, o que não é possível, pois $3p$ é múltiplo de 3 mas $9k^2-1$ não é.
3ª possibilidade: $a+1=3k$. Então $3p=(a-1)3k \Rightarrow p=(a-1)k \Rightarrow a-1=1$ ou $k=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow p=1$ o que não é possível.

Novamente a resposta é: $p=5$ é a única solução possível.

4ª solução. Escrevendo $3p+1=a^2$, temos $3p=(a-1)(a+1)$. O Problema 4.8.23 da página 106 garante que 3 divide $a-1$ ou $a+1$. Temos assim dois casos a considerar:
1º caso: $a-1=3k$. Já vimos que esta situação conduz a $p=5$.
2º caso: $a+1=3k$. Já vimos que esta situação não é possível.

Novamente a resposta é: $p=5$ é a única solução possível. □

4.10 Problemas

Problema 4.10.1. Explique por que 2 é o único primo par, e por que 3 é primo. E quanto a 5 e 7?

Problema 4.10.2. Explique por que é ímpar todo número natural que divide outro número ímpar.

Problema 4.10.3. Explicite em algumas palavras que método temos até o momento para verificar se um dado número é primo ou não. Que tipo de economia nos cálculos é possível fazer nesse método? Aplique esse método para ver que os números 11, 13, 17, 19, 503 e 809 citados no texto como primos o são efetivamente.

Problema 4.10.4. Demonstre que se a, b e c são números naturais tais que c divide $a+b$ e c divide a, então c divide b.

Problema 4.10.5. Demonstre que se a, b e $c \neq 0$ são números naturais tais que ac é múltiplo de bc, então a é múltiplo de b. A hipótese $c \neq 0$ é necessária?

Problema 4.10.6. Encontre o menor ímpar composto. Encontre o menor ímpar composto que é produto de três primos (diferentes).

Problema 4.10.7. Seja d um algarismo decimal e seja $n = (dd\ldots d)_{dez}$ um número natural tal que $n \geq 11$. Prove que se n for primo então $d = 1$. Mostre que esta situação efetivamente ocorre, isto é, existem números n da forma acima, com $d = 1$, que são primos.

Problema 4.10.8. Demonstre que um número natural $p > 1$ é primo se e somente se não se escreve na forma $p = ab$, com $a > 1$ e $b > 1$ números naturais.

Problema 4.10.9. Se um primo p é da forma $3n+1$ para algum número natural n, o que você pode afirmar sobre n? Justifique.

Problema 4.10.10. Prove que se o primo p é fator do primo q então $p = q$.

Problema 4.10.11. **a)** Demonstre que se p é primo então p não pode dividir ao mesmo tempo um número natural e seu sucessor. **b)** Demonstre que se p é primo ímpar então p não pode dividir ao mesmo tempo um número natural n e seu sucessor de mesma paridade $n+2$.

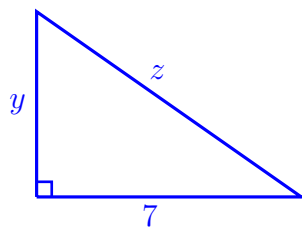
Problema 4.10.12. Demonstre que o produto de dois ou mais números naturais da forma $3t+1$ ainda é desta forma.

Problema 4.10.13. Demonstre as seguintes afirmações de Theon de Smyrna: **a)** Se m é um número natural, então ou m^2 ou m^2-1 é múltiplo de 3. **b)** Se m é um número natural, então ou m^2 ou m^2-1 é múltiplo de 4.

Figura 4.5. Desenho representando Theon de Smyrna, filósofo, matemático e astrônomo da Antiga Grécia. Pertenceu à Escola Pitagórica. Escreveu comentários para o entendimento da obra de Platão, em que abordou números pares e ímpares, primos, perfeitos e abundantes, além de um estudo sobre as melhores aproximações de $\sqrt{2}$ usando equações diofantinas.

Problema 4.10.14. Identifique todos os números primos da forma $(a_1a_0)_{dez}$ tais que $a_1 \times a_0$ também é primo.

Problema 4.10.15. Demonstre que se $n > 4$ é composto então n é fator de $(n-1)!$

Problema 4.10.16. Um triângulo retângulo tem catetos 7 e y, e hipotenusa z. Sabendo que y e z são números naturais, calcule-os.

Problema 4.10.17. Verifique se o seguinte argumento pode ser usado para demonstrar que existem infinitos números primos. Existem infinitos números naturais, certo? Como os primos são os “blocos construtivos” dos naturais, então (?) há que existirem infinitos deles.

Problema 4.10.18. Demonstre os seguintes critérios de divisibilidade no sistema decimal. **a)** *critério de divisibilidade por 4:* um número natural $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ é múltiplo de 4 se e somente se $(a_1 a_0)_{\text{dez}}$ o for. **b)** *critério de divisibilidade por 5:* um número natural $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ é múltiplo de 5 se e somente se $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$. **c)** *critério de divisibilidade por 10:* um número natural $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ é múltiplo de 10 se e somente se $a_0 = 0$.

Problema 4.10.19. O que se pode afirmar sobre a representação decimal de um número que é múltiplo de 50? Por quê?

Problema 4.10.20. Um estudante, perguntado se 458 941 é múltiplo de 7, fez os seguintes cálculos:

$$\begin{array}{cccccc}
4 & 5 & 8 & 9 & 4 & 1 \\
 & & & - & 2 & 1 \\
\hline
4 & 5 & 8 & 9 & 2 & 0 \\
 & & - & 4 & 2 & \\
\cline{1-5}
4 & 5 & 8 & 5 & 0 & \\
 & - & 3 & 5 & & \\
\cline{1-4}
4 & 5 & 5 & 0 & & \\
- & 3 & 5 & & & \\
\cline{1-3}
4 & 2 & 0 & & &
\end{array}$$

Como 42 é múltiplo de 7, então 458 941 também é, concluiu o estudante.
a) Verifique se o estudante está correto e explique seu raciocínio. **b)** Comprove se o método do estudante possibilita verificar a multiplicidade por 7 de qualquer número natural escrito no sistema decimal. **c)** Investigue para quais números, além de 7, o método funciona.

Problema 4.10.21. Demonstre o seguinte critério de divisibilidade por seis: um número natural é múltiplo de 6 se e somente se for múltiplo de 2 e de 3. Alguma generalização?

Problema resolvido 4.29. Se p e $p+2$ são primos os denominamos *primos gêmeos.* O estudante pode examinar a lista de primos do Apêndice A, página 223, e ver que existem muitos primos gêmeos. Investigue se existem muitos primos *trigêmeos*, isto é, p, $p+2$ e $p+4$ que sejam todos primos. Um exemplo é 3, 5 e 7.

1ª solução. Já sabemos que se $p = 3$ então p, $p+2$ e $p+4$ são primos trigêmeos. Suponhamos $p > 3$. O Problema 4.8.20, na página 106, pede para provar que para todo número natural n

exatamente um dos números n, $n+2$ ou $n+4$ é múltiplo de 3. Portanto p, $p+2$ e $p+4$ não podem ser todos primos, a não ser que $p=3$.

2ª. solução. Vamos examinar alguns ternos de números p, $p+2$ e $p+4$, com p primo, e tentar perceber alguma regularidade. Temos:

p	$p+2$	$p+4$
5	7	9
7	9	11
11	13	15
13	15	17
17	19	21

Observamos que em cada linha existe um múltiplo de 3 e ele está às vezes na segunda coluna, outras vezes na terceira. Examinando mais de perto vemos que se $p=3q+1$ para algum natural q então o múltiplo de 3 está na segunda coluna, e se $p=3q+2$ para algum natural q então o múltiplo de 3 está na terceira coluna. Agora é fácil obter uma prova geral. Se $p=3q+1$ então $p+2=3q+1+2=3q+3=3(q+1)$. Se $p=3q+2$ então $p+4=3q+2+4=3q+6=3(q+2)$. Esses múltiplos de 3 são sempre >3 portanto nunca são primos. Como todo primo $p>3$ é da forma $p=3q+1$ ou $p=3q+2$ para algum natural q, fica provado que não existem primos trigêmeos p, $p+2$ e $p+4$, com $p>3$. □

Problema resolvido 4.30. Considere a sequência 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... formada pelos números naturais em ordem crescente, sendo que o número n aparece n vezes consecutivas. Calcule o 2010º termo.

Solução. Ao escrever a sequência desde o início temos: escrevendo o número 1 escrevemos 1 número no total; terminando de escrever o número 2 escrevemos $1+2$ números no total; terminando de escrever o número 3 escrevemos $1+2+3$ números no total; e, assim por diante, terminando de escrever o número k escrevemos $1+2+3+\ldots+k$ números no total.

Como $1+2+3+\ldots+k = k(k+1)/2$, calculamos k tal que $k(k+1)/2 = 2010$, e encontramos $k \approx -63,9$ e $k \approx 62,9$. Rejeitamos o valor negativo e arredondamos para baixo o segundo (esse valor não é um número natural certamente porque o 2010º termo não é o último da lista do mesmo número). Calculamos $62(62+1)/2 = 1953$, o que significa que ao terminarmos de escrever 62 vezes o número 62 atingimos o 1953º termo da sequência. Os próximos 63 termos da sequência são todos constituídos pelo número 63. Como $1953+63=2016$, segue que o 2010º termo da sequência é 63. □

4.11 Teoria aditiva dos números naturais

Estivemos estudando os números naturais mediante sua decomposição como produto de outros números. Para isso usamos muito a multiplicação e a divisão. Alternativamente podemos estudar propriedades dos números naturais considerando sua partição como soma de números de um determinado tipo. É o que se chama de *teoria aditiva*.

Como exemplo lembramos que já sabemos que todo número natural positivo se escreve como soma de diferentes potências de 2, e de uma única forma, desconsiderando-se a ordem das parcelas. Por exemplo, para decompor 37 calculamos sua representação binária:

$$37 = (100101)_{dois} = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + o\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

de modo que

$$37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$$

e, como a representação binária é única, essa é a única representação de 37 como soma de potências de 2, a menos da ordem das parcelas. Para mais detalhes confira o Problema 2.12.14, na página 46.

Por *partição* de um número natural positivo se entende sua representação como soma de números naturais positivos (pode ser "soma" de uma só parcela). Nesse tipo de representação não são distinguidas duas representações que diferem apenas pela ordem de parcelas.

Vejamos alguns exemplos:

partições:

de 1: 1

de 2: $2 = 1 + 1$

de 3: $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$

de 4: $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

de 5: $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

de 6: $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Indicando por $p(n)$ a quantidade de partições de n, vemos que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$. Fazendo mais experimentos numéricos, a primeira constatação é que $p(n)$ aumenta muito rapidamente. Por exemplo,

$$p(10) = 42, \quad p(20) = 627, \quad p(30) = 5604, \quad p(100) = 190.569.292$$

Uma fórmula inicial para $p(n)$ foi descoberta por Srinivasa I. Ramanujan, e depois aperfeiçoada por outros matemáticos. Para mais detalhes consulte [99], a partir da página 160.

Figura 4.6. Foto de Srinivasa I. Ramanujan, genial matemático hindu. Foi um autodidata, e usava um método próprio para estudar Matemática. Contribuiu em Teoria dos Números, Análise, séries infinitas e frações contínuas. Durante sua curta vida desenvolveu aproximadamente 3900 identidades e equações. Ramanujan, em geral, não fornecia demonstrações de seus resultados, e, ao que parece, ele mesmo não as tinha. Mas a maioria delas foi posteriormente confirmada e demonstrada por outros matemáticos.

Podemos considerar também decomposições de números naturais como soma e diferença de números de um dado conjunto. Veremos no Problema 6.6.13, página 163, que, usando a representação ternária balanceada, podemos escrever qualquer número natural de forma única como soma e diferença de diferentes potências de 3. Por exemplo,

$$148 = 3^5 - 3^4 - 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$$

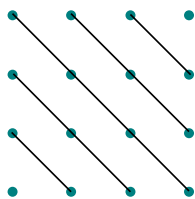
O estudante está convidado a investigar outros resultados sobre a abordagem aditiva no Problema 4.12.22 e nos temas 4.14.9, 4.14.10 e 4.14.11.

4.12 Problemas adicionais

Problema 4.12.1. Um professor, ao aplicar atividades de resolução de problemas em suas aulas, prefere repartir os estudantes em grupos de três. Explique por que $n \geq 2$ estudantes sempre podem ser repartidos em grupos de três e no máximo dois grupos de dois.

Problema 4.12.2. Verifique que, dados dois números naturais pares consecutivos, exatamente um deles é múltiplo de 4.

Problema 4.12.3. Determine condições necessárias e suficientes sobre os números naturais m e n para que a potência m^n seja **a)** par; **b)** ímpar.

Problema 4.12.4. Dado o número figurado 4^2, consideremos linhas paralelas à diagonal principal, conforme a figura abaixo.

Isto nos sugere $1+2+3+4+3+2+1 = 4^2$. Generalize. Use esta observação para verificar a fórmula $1+2+3+\cdots+n = (1/2)n(n+1)$. Você fez uma indução ou uma dedução?

Problema 4.12.5. Prove que todo número pentagonal P_n com $n \geq 1$ se escreve como a soma de um número quadrado com um número triangular. Para completar o caso $n = 1$ defina o número triangular $T_0 = 0$.

Problema 4.12.6. O matemático hindu Aryabhata descobriu, por volta do ano 500, uma fórmula para a soma $T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$ para todo número natural n. Faça isto você também.

Figura 4.7. Foto de estátua de Aryabhata, matemático e astrônomo da idade clássica da Índia. Em seu tratado sobre Matemática abordou Aritmética, Álgebra, trigonometria plana e esférica, frações contínuas, equações quadráticas, séries de potências e apresentou uma tábua para o seno.

Problema 4.12.7. Tomando os números naturais positivos em ordem consideramos conjuntos formados por eles, o primeiro com o número 1, o segundo com os dois seguintes, o terceiro com os três subsequentes, etc. Temos assim

$$\{1\} \quad \{2,3\} \quad \{4,5,6\} \quad \{7,8,9,10\} \quad \ldots$$

Em que conjunto aparece o número 2000? Dê o primeiro número do conjunto, o último e a ordem na qual 2000 aparece no conjunto.

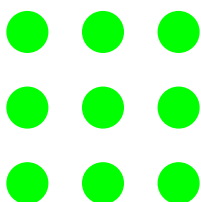
Problema 4.12.8. Os números naturais de 1 a 2010 são escritos em um grande quadro negro. Em seguida, um estudante apaga dois quaisquer desses números e escreve no quadro sua diferença (positiva ou zero). Repete a operação até que um único número fique escrito no quadro. É possível que esse número seja zero?

Problema 4.12.9. Em um plano existem 11 cidades numeradas de 1 a 11. Estradas retilíneas ligam 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, 4 a 5, 5 a 6, 6 a 7, 7 a 8, 8 a 9, 9 a 10, 10 a 11, e 11 a 1. Se as cidades estiverem em uma posição favorável, é possível construir uma estrada retilínea adicional cortando todas essas estradas e que não passe por nenhuma cidade?

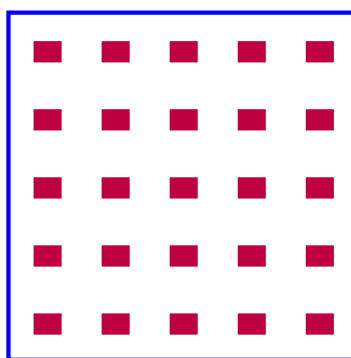
Problema 4.12.10. a) Consideremos os números naturais de 1 a 10, escritos em fila:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Antes de cada um deles coloque sinais "+" ou "−" de forma que o cálculo da expressão resulte zero. **b)** Resolva problema similar para os números de 1 a 11.

Problema 4.12.11. Resolva o problema abaixo e considere outros problemas similares obtidos mediante sua modificação.

Um jogo tem 9 botões luminosos dispostos como na figura. Cada botão pode ficar de cor verde ou vermelha. Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (vizinhos na direção horizontal, vertical ou diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não. Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

Problema 4.12.12. Uma classe tem 25 carteiras, e cada carteira está ocupada por um estudante. Entra o professor de Matemática, e diz: — Todo aluno desta classe deve, uma única vez, trocar de carteira com um colega. Pergunta-se: será possível cumprir o pedido do professor?

Problema 4.12.13. Resolva o problema abaixo e considere também modificações, tomando classes no formato $n \times m$.
Uma classe tem 25 carteiras dispostas de acordo com a figura. Cada carteira está ocupada por um estudante. Entra o professor de Matemática, e diz: — Todo aluno desta classe deve mudar de carteira, uma única vez, passando para uma carteira contígua à sua, na direção horizontal ou vertical. Pergunta-se: será possível cumprir o pedido do professor?

Problema 4.12.14. Em uma festa comparecem 9 pessoas. Algumas se cumprimentam com um aperto de mão, outras não. Confira se é possível que cada pessoa cumprimente exatamente outras 3.

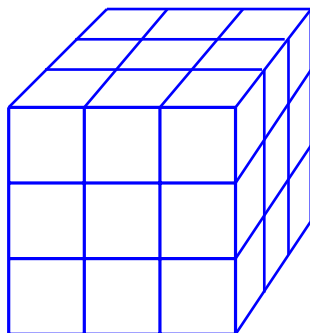
Problema 4.12.15. Em um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas Oxy considere a reta $x - y + 17 = 0$. Quantos e quais são os pontos (p, q) do plano pertencentes à reta com p e q primos?

Problema 4.12.16. Em um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas Oxy considere a circunferência $x^2 + y^2 = 7373$. Justifique por que nessa circunferência existem pontos (x, y) sendo x e y números naturais. Quantos e quais são os pontos (p, q) do plano pertencentes à circunferência com p e q primos?

Problema 4.12.17. Verifique se os números naturais a, b e $\log_b a$ podem ser todos primos.

Problema 4.12.18. Demonstre o seguinte resultado atribuído à Escola Pitagórica: se um ímpar divide um par, então o ímpar também divide a metade do par.

Problema 4.12.19. Pegue uma folha de papel e corte-a em cinco pedaços. Pegue um dos pedaços e corte-o em cinco pedaços. Após ter feito isso várias vezes é possível obter exatamente 1000 pedaços de papel? e 1001?

Problema 4.12.20. Um cubo de lado 3 é subdividido em 27 cubos unitários. Escolhemos um dos cubos unitários posicionado no centro de uma das faces, e o denominamos A. Do centro do cubo unitário A traçamos um segmento até o centro de um cubo adjacente qualquer B, que tem uma face comum com A. Do centro do cubo unitário B traçamos um segmento até o centro de um cubo adjacente qualquer C, que tem uma face comum com B. E assim por diante, pergunta-se se é possível traçar uma linha poligonal passando uma única vez pelos centros de todos os cubos unitários, iniciando no centro do cubo A e com ponto final no centro do cubo maior.

Problema 4.12.21. Prove que 4 não é fator de $n^2 + 2$ para todo número natural n.

Problema 4.12.22. Demonstre que a chamada "conjectura forte" de Christian Goldbach

A) *Todo número natural par > 2 é soma de dois primos (não necessariamente diferentes).*

é equivalente à seguinte afirmação:

B) *Todo número natural > 5 é soma de três primos (não necessariamente diferentes)*

4.13 Pequeno exemplo de investigação

Um problema com presença quase certa em qualquer livro didático de Teoria dos Números é um do tipo:

com quantos zeros termina 136! *?*

ou um mais geral: *com quantos zeros termina* $n!$ *?*

Lembramos que para todo número natural $n \geq 1$ o número $n!$ chama-se *fatorial* de n e consiste do produto de todos os números naturais ≥ 1 até n, inclusive. Ou seja,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot n$$

Se $n = 1$ isso significa $1! = 1$. Podemos estender esta definição estabelecendo que $0! = 1$. Escolhemos esse valor para $0!$ por conveniência, por combinar com certas fórmulas.

Uma primeira ideia para resolver o primeiro problema seria calcular 136! Mas se trata de um número muito grande, é preciso usar um aplicativo computacional especial. De qualquer forma, não queremos examinar apenas o número 136! mas qualquer $n!$ Para isso precisamos perceber nesses produtos alguma propriedade, algum comportamento repetitivo ou, como se diz, alguma regularidade.

Para um melhor entendimento da questão podemos iniciar examinando os primeiros produtos:

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Vemos que o primeiro zero só apareceu para 5! o que nos lembra que 5 vezes um par resulta um número terminado em zero. Nenhum zero adicional aparece em 6! ou em 7! ou em 8! e nem em 9! todos esses terminam em um zero.

Quando chegamos em 10! temos mais um motivo para aparecer outro zero, pois 10 multiplicado por qualquer número termina em zero. E essas são as únicas formas de se obter um zero. Portanto

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ termina em dois zeros,

assim como todos os fatoriais até 15!, quando aparece mais um zero. Deste a 19! todos terminam com três zeros.

Em seguida passamos para $n = 20$ e vemos que

$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot$ dois zeros
$\cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$ mais dois zeros

portanto 20! termina com quatro zeros. Está inseguro? Podemos conferir com um aplicativo computacional:

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$$

Percebemos assim uma regularidade: cada dezena tem dois múltiplos de 5, e cada um fornece um zero. Um número terminado em 5, que multiplicado por um par fornece um zero, e um número teminado em zero, que já tem um fator 5 multiplicado por um par, e fornece outro zero.

Aparentemente temos a seguinte regra: para saber com quantos zeros termina $n!$, contamos quantas dezenas completas existem, e cada uma tem dois múltiplos de 5. Depois se vê a dezena não completa, se existir. Por exemplo, 136 tem 13 dezenas completas, o que fornece 26 zeros, e de 131 a 136 tem mais um múltiplo que 5, que é 135, e assim temos mais um zero. Será que 136! termina com 27 zeros?

Devagar ... é prudente pensar mais, examinar mais exemplos. Vejamos:

$$30! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \quad \rightarrow \text{dois zeros}$$
$$\cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \quad \rightarrow \text{mais dois zeros}$$
$$\cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \quad \rightarrow \text{hum ... 25 tem dois fatores 5}$$

Veja que 25 multiplicado por dois pares fornece mais dois zeros. Assim a terceira dezena de 30! fornece três zeros, de modo que esse número termina com 7 zeros.

Vemos que as dezenas não são todas iguais no que se refere à presença de um fator 5. 25 e seus múltilos fornecem mais um zero: 25, 50, 75, 100, 125, ... Bem, $125 = 5^3$ tem três fatores 5, de modo que 125 e seus múltiplos fornecem um terceiro zero a mais. E assim por diante.

Estamos agora diante de uma regra: a quantidade de zeros no final de $n!$ é:

quantidade de múltiplos de 5 de 1 a n
\+ *quantidade de múltiplos de 25 de 1 a n*
\+ *quantidade de múltiplos de 125 de 1 a n*
\+ ...

Observe que essa soma é finita, pois paramos quando chegarmos a uma potência de 5 maior do que n.

Vamos agora responder á pergunta inicial: *com quantos zeros termina* 136! *?* Como $136 \div 5 = 27$ com resto 1, $136 \div 25 = 5$ com resto 11 e $136 \div 125 = 1$ com resto 11, vemos que de 1 a 136, existem 27 múltiplos de 5, mais 5 múltiplos de 25 e 1 múltiplo de 125. Portanto a resposta é:

$$136! \text{ termina com } 27 + 5 + 1 = 33 \text{ zeros}$$

Para encerrar nossa investigação, observamos que um estudante se preocupou com a seguinte questão: para que um fator 5 forneça um zero, ele precisa ser multiplicado por um número par. Existem pares suficientes? Por exemplo, se n for maior do que 5^{35}, este número precisa ser multiplicado por 35 pares. E até chegar nesse número já foram usados muitos e muitos pares. Os pares são suficientes? Fica essa tarefa para você desvendar.

4.14 Temas para investigação

Tema 4.14.1. De acordo com o Problema 4.8.14 podemos observar que o critério de divisibilidade por 2 enunciado na Proposição 4.13 não se aplica para o sistema ternário. Descubra um critério de divisibilidade por 2 para o sistema ternário. E quanto a outros sistemas de numeração?

Tema 4.14.2. a) Divida por 8 os números 3^2, 5^2, 7^2 e 9^2. Que regularidades você observa? Faça mais alguns testes para constatar se as regularidades permanecem com outros valores. **b)** Transforme as regularidades em conjecturas gerais. Use algum método considerado válido pela Matemática para verificar se as conjecturas são verdadeiras ou falsas. Investigue as recíprocas de suas conjecturas. **c)** Que regularidades e conjecturas similares podem ser obtidas da sequência 2^2, 4^2, 6^2,...?

Tema 4.14.3. O estudante deve ter resolvido o Problema 4.8.18, proposto na página 106:

Determine o dígito da unidade do número $N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2007$*, produto dos ímpares de 1 a 2007.*

Certamente obteve a resposta correta de que o dígito é 5, e deve ter justificado. Explore mais esse problema, considerando mudanças de hipóteses. Isto é, invente problemas que tenham a mesma ideia mas com alguma modificação importante.

Por exemplo:

Determine o dígito da unidade do número $M = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdots 2007$*, produto dos ímpares de 1 a 2007 exceto aqueles que terminam em 5.*

Tema 4.14.4. Os números naturais de 1 a n são escritos em um grande quadro negro. Em seguida, um estudante apaga dois quaisquer desses números e escreve no quadro sua diferença (positiva ou zero). Repete a operação até que um único número fique escrito no quadro. Para quais n é possível que esse número seja zero?

Tema 4.14.5. Dado um número natural n consideremos os números naturais de 1 a n escritos em fila:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots \quad n$$

Caracterize os valores de n para os quais é possível colocar antes de cada um dos números de 1 a n sinais "+" ou "−" de forma que o cálculo da expressão resulte zero.

Tema 4.14.6. a) Uma jarra contém bolas vermelhas e bolas amarelas. Fora da jarra estão à disposição uma quantidade suficiente de bolas de ambas as cores. O seguinte procedimento é executado sempre que a quantidade de bolas na jarra for ≥ 2: são retiradas duas bolas da jarra; se as duas tiverem a mesma cor, é colocada uma bola vermelha na jarra; se as duas tiverem cores diferentes, é colocada uma bola amarela na jarra. No final dessa brincadeira quantas bolas amarelas restam, e quantas vermelhas? **b)** Invente um problema similar envolvendo bolas de três cores.

Tema 4.14.7. a) Um estudante calculou o valor dos primeiros números cúbicos 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ... e tirou os noves fora de cada um. Observou que ocorria uma certa regularidade. Encontre essa regularidade e justifique. **b)** Observando que

$$\underbrace{1}_{1^3} \quad \underbrace{3 \;\; 5}_{2^3} \quad \underbrace{7 \;\; 9 \;\; 11}_{3^3}$$

descubra você também um teorema de Nicômaco de Gerasa. **c)** Um certo subconjunto infinito de números naturais são dispostos em linhas, em um arranjo cujas quatro primeiras linhas estão escritas a seguir. Encontre regularidades nesse arranjo. Demonstrações?

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \\
3 & 5 & & \\
6 & 9 & 12 & \\
10 & 14 & 18 & 22 \\
\vdots & & &
\end{array}$$

d) Investigue outras propriedades dos números cúbicos. Investigue também se as propriedades estudadas aqui para números cúbicos se estendem para outras potências, como as quadradas, as quárticas, as quínticas, etc.

Tema 4.14.8. Se p e $p+2$ são primos, eles são chamados *primos gêmeos*, conforme vimos no Problema Resolvido 4.29. **a)** Faça uma lista de primos gêmeos. **b)** Descubra alguma propriedade interessante dos primos gêmeos. Sua propriedade pode facilitar a busca de primos gêmeos? **c)** Pesquise na literatura propriedades dos primos gêmeos. **d)** E quanto a triplos de primos? Quem sabe p, $p+2$ e $p+6$? Quádruplos?

Tema 4.14.9. Investigue que números naturais podem ser escritos como diferença de dois quadrados. Nos casos afirmativos desvende como calcular a quantidade de representações diferentes.

Tema 4.14.10. Podemos estender a definição de número triangular para $n = 0$ pondo $T_0 = 0$. Esta definição combina com as várias fórmulas elaboradas para T_n, como 4.1, 4.2 ou 4.3 dadas na página 94. J. C. F. Gauss provou em [39] que todo número natural pode ser escrito como uma soma de três números triangulares T_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (não necessariamente diferentes). Verifique essa afirmação para todo número natural ≤ 50. Alguma conjectura similar para números pentagonais? Alguma demonstração?

Figura 4.8. Foto de pintura de Johann Carl Friedrich Gauss, importante matemático alemão que contribuiu nas áreas de Teoria dos Números, Álgebra, Estatística, Análise, Geometria Diferencial, Geofísica, Mecânica, Eletrostática, Astronomia, Ótica, dentre outras. Teve grande influência no desenvolvimento da Matemática e de outras ciências. Considerado um prodígio, sua maior obra, *Disquisitiones Arithmetica* [39], foi terminada quando tinha 21 anos, em 1728.

Tema 4.14.11. Investigue, começando com exemplos, resultados sobre a representação de números naturais como soma de quadrados. Faça conjecturas gerais. **a)** Examinando os números naturais ≤ 50, veja que todos eles podem ser escritos como soma de no máximo quatro quadrados não nulos, não necessariamente diferentes. **b)** Que tipo de primos parece que podem ser escritos como soma de dois quadrados não nulos? Por exclusão, quais não podem? **c)** E quanto à soma de três quadrados?

4.15 Sugestões de atividades orientadas

Atividade 4.15.1. Às vezes se diz que a Teoria dos Números estuda as propriedades *intrínsecas* dos números, isto é, aquelas propriedades que não dependem do particular sistema de numeração que está sendo usado para representar os números. O contrário é denominado propriedade *extrínseca*. Percorrendo o texto procure exemplos de propriedades intrínsecas e propriedades extrínsecas.

Atividade 4.15.2. O estudo da relação de pessoas autistas com números tem revelado aspectos interessantes sobre a capacidade do homem de reconhecer os números. Faça uma pesquisa sobre esse assunto.

Atividade 4.15.3. Assista documentários ou filmes sobre a vida de matemáticos importantes para a Aritmética e a Teoria dos Números. Johann Carl Friedrich Gauss e Srinivasa I. Ramanujan são duas boas escolhas.

Atividade 4.15.4. Informe-se sobre o desenvolvimento da Aritmética e da Teoria dos Números em livros de História da Matemática.

Atividade 4.15.5. Assinale em um mapa os principais locais relacionados com o desenvolvimento da Aritmética e da Teoria dos Números, como centros de estudo e locais de nascimento e vida de matemáticos.

Capítulo 5

Números primos e compostos

5.1 Introdução

Dado um número natural, como encontrar seus divisores?

Como determinar se um dado número natural é primo ou não?

Como fazer uma lista de números primos?

Existe uma infinidade de números primos?

O que são o *mdc* e o *mmc*?

Neste capítulo prosseguimos nossa análise dos números naturais mediante a investigação das propriedades dos números primos e compostos. Estudamos alguns dos problemas anteriormente colocados sobre números primos e compostos, como a infinitude dos primos, e apresentamos as propriedades mais elementares do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum. São conceitos básicos mas muito importantes na Teoria dos Números.

5.2 Propriedades dos divisores de um número natural

Dado um número natural n, para encontrar seus divisores podemos fazer o trabalho braçal de dividi-lo por todos os números entre 1 e n. Sempre que a divisão der exata, encontramos um divisor. Certamente que podemos economizar muito esforço se compreendermos as propriedades gerais dos divisores. Isso é o que vamos fazer agora.

Indicamos por $\mathcal{D}(n)$ o conjunto dos divisores do número natural n. Nada melhor do que começar com alguns exemplos:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{D}(0) = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} & \mathcal{D}(1) = \{1\} \\
\mathcal{D}(2) = \{1, 2\} & \mathcal{D}(3) = \{1, 3\} \\
\mathcal{D}(4) = \{1, 2, 4\} & \mathcal{D}(5) = \{1, 5\} \\
\mathcal{D}(6) = \{1, 2, 3, 6\} & \mathcal{D}(7) = \{1, 7\} \\
\mathcal{D}(8) = \{1, 2, 4, 8\} & \mathcal{D}(9) = \{1, 3, 9\} \\
\mathcal{D}(10) = \{1, 2, 5, 10\} & \mathcal{D}(11) = \{1, 11\} \\
\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} & \mathcal{D}(15) = \{1, 3, 5, 15\}
\end{array}$$

O estudante poderá estender esta lista achando outros conjuntos de divisores, como $\mathcal{D}(16)$, $\mathcal{D}(25)$, $\mathcal{D}(30)$, $\mathcal{D}(60)$, etc.

Em certa ocasião estava trabalhando com estudantes de uma classe de um curso de Matemática, e lhes pedi que observassem regularidades relacionadas com esses conjuntos. Eles perceberam várias propriedades. Listamos algumas delas a seguir, e apresentamos outras na seção de problemas 5.3, a partir da pág. 128.

Propriedade 1. 1 e n estão sempre em $\mathcal{D}(n)$ para todo número natural $n \neq 0$.

De fato, para todo número natural $n > 0$ se tem $n = 1 \cdot n$, portanto 1 e n são sempre divisores de n. Observamos que para $n = 0$ também se tem $0 = 1 \cdot 0$, portanto 1 é divisor de 0, mas, por definição, admitimos que 0 não é divisor de número algum. Por isso excluímos $n = 0$ desta propriedade.

Propriedade 2. Se $n \neq 0$ e se $m \in \mathcal{D}(n)$ então $m \leq n$.

De fato, se $m \in \mathcal{D}(n)$ e $n \geq 1$ então existe um número natural $s \geq 1$ tal que $n = sm$. Assim $m = 1 \cdot m \leq sm = n \Rightarrow m \leq n$.

Propriedade 3. Se $n \neq 0$ e se $m \in \mathcal{D}(n)$ então $m \leq n/2$ ou $m = n$. Em outros termos, entre $n/2$ e n não existem divisores de n.

De fato, se $m \in \mathcal{D}(n)$ então existe q tal que $n = mq$. Se $m < n$ não pode ser $q = 1$, assim $2 \leq q$. Segue que $2m \leq mq = n$ e então $m \leq n/2$. Portanto, $m = n$ ou $m \leq n/2$.

Propriedade 4. Se $n \neq 0$ e se $m \in \mathcal{D}(n)$ então o quociente da divisão de n por m também está em $\mathcal{D}(n)$.

De fato, se $m \in \mathcal{D}(n)$, o quociente q da divisão de n por m satisfaz $n = mq$. Mas $n = mq$ significa também que q é divisor de n.

Propriedade 5. Se $m \in \mathcal{D}(n)$ então $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}(n)$.

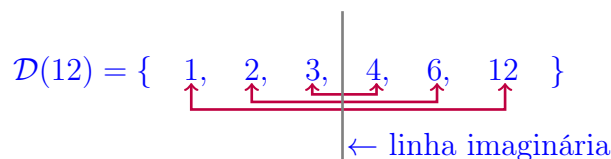
Fica para o estudante demonstrar essa propriedade.

Propriedade 6. Se p é primo então $\mathcal{D}(p) = \{1, p\}$.

Novamente fica para o estudante demonstrar essa propriedade.

Propriedade 7. Seja $n \neq 0$. Os elementos de $\mathcal{D}(n)$ podem ser organizados em dois grupos com a mesma quantidade, um constituído dos divisores $< \sqrt{n}$ e outro constituído dos divisores $> \sqrt{n}$. O número real $\sqrt{n}$ pode ser um divisor isolado fora desses dois grupos ou pode não ser um divisor.

De fato, seja $n = rs$, com $r \leq s$. Se $r = s$ então $n = r^2$ e $r = \sqrt{n}$ é um divisor de n. Suponhamos que $r < s$. Temos $r \cdot r < rs$ ou $r^2 < n$, ou seja, $r < \sqrt{n}$. Por outro lado $r < s \Rightarrow rs < s \cdot s \Rightarrow n < s^2$, ou seja, $\sqrt{n} < s$. Portanto, os divisores de n ocorrem em pares, com um $< \sqrt{n}$ e outro $> \sqrt{n}$, exceto quando n é um quadrado perfeito, sendo que nesse caso $\sqrt{n}$ é um divisor isolado, situado entre os dois grupos.

Colocando os elementos de $\mathcal{D}(n)$ em ordem crescente, podemos desenhar uma linha imaginária passando por $\sqrt{n}$, esteja ou não $\sqrt{n}$ em $\mathcal{D}(n)$, e observar claramente os dois grupos, como está ilustrado a seguir.

Vemos nesse exemplo que a linha imaginária passa por $\sqrt{12} \approx 3,46$, sendo que esse número não comparece em $\mathcal{D}(12)$ pelo motivo de não ser número natural.

Propriedade 8. Seja $n \neq 0$. Colocando os elementos de $\mathcal{D}(n)$ em ordem crescente, vemos que o produto de dois elementos quaisquer equidistantes dos extremos é sempre n. Fica subtendido que se houver um elemento central se faz o produto dele por ele mesmo, que assim é igual a n.

Os divisores de 12, exibidos logo acima, ilustram essa propriedade: $1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$. Examinando os divisores de 16 vemos um caso em que existe um elemento central: $4 \cdot 4 = 16$.

$$\mathcal{D}(16) = \{ \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16 \quad \}$$

Para justificar a propriedade basta observar o seguinte. Seja $n = r_1 s_1$ e $n = r_2 s_2$, com $r_1 < r_2$. Multiplicando essa desigualdade por s_1 temos $s_1 r_1 < s_1 r_2$. Mas $s_1 r_1 = n = s_2 r_2$, de modo que $s_2 r_2 < s_1 r_2 \Rightarrow s_2 < s_1$. Portanto se ordenarmos de forma crescente os divisores $< \sqrt{n}$ a partir de 1, os respectivos quocientes (que são os divisores $> \sqrt{n}$) estão ordenados de forma decrescente a partir de n.

Podemos extrair da Propriedade 7 um importante resultado:

Teorema 5.1. *Se o número natural n não é primo, então ele tem um divisor primo $\leq \sqrt{n}$.*

Demonstração. Se n não é primo, existem números naturais $1 < r < n$ e $1 < s < n$ tais que $n = rs$. Podemos supor que $r \leq s$. Então $r^2 \leq rs = n$, portanto $r \leq \sqrt{n}$. Mas, de acordo com o Escólio 4.23 da página 109, r tem um divisor primo p, e temos $p \leq r$. Portanto $p \leq \sqrt{n}$. Por ser divisor de r, p também é divisor de n, e terminamos. □

Problema resolvido 5.2. a) Explique por que, para todo número natural $m \geq 3$, o número $m^2 - 1$ é composto. **b)** Explique por que, para todo número natural $m \geq 4$, o número $m^2 - m - 2$ é composto. **c)** Prove que se $p \geq 5$ é primo, então o número $p^2 + 8$ é composto.

Solução de a) Como $m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$ e como $m + 1 > 1$ e $m - 1 > 1$, então $m^2 - 1$ é composto.

Solução de b) Todo trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ se decompõe na forma $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$, sendo r e s os zeros do trinômio. Se x, a, b, c, r e s são números inteiros e se $x - r > 1$ e $x - s > 1$, então $ax^2 + bx + c$ é composto.

No caso em questão, os zeros de $m^2 - m - 2$ são 2 e -1, de modo que $m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$. Como $m \geq 4$, temos $m + 1 > 1$ e $m - 2 > 1$, logo $m^2 - m - 2$ é composto.

Solução de c) A expressão $p^2 + 8$ é um trinômio do segundo grau. Assim, a princípio, podemos pensar em proceder como no item b). Mas as raízes desse trinômio são números complexos, de modo que aquela tática não funciona aqui. Assim devemos pensar em expressões para substituir p.

A primeira que pode ocorrer é considerar classes módulo 2. Assim, p é par ou ímpar. Como p é primo ≥ 5, vemos que ele é ímpar. Podemos escrever $p = 2k+1$ para algum número natural k. Temos então $p^2 + 8 = (2k+1)^2 + 8 = 4k^2 + 4k + 1 + 8 = 4k^2 + 4k + 9$. Novamente temos um trinômio do segundo grau cujas raízes são números complexos, de modo que novamente nossa tática não funcionou.

Podemos pensar em considerar classes módulo 3. Sabemos que p se escreve na forma $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$. Como p é primo, a forma $3k$ só seria possível para $p=3$, mas, por hipótese $p \geq 5$. Ficamos assim com dois casos que devem ser examinados separadamente:
1º caso: $p = 3k+1$. Aqui $p^2+8 = (3k+1)^2+8 = 9k^2+6k+1+8 = 9k^2+6k+9 = 3(3k^2+2k+3)$, e p^2+8 se decompõe em dois fatores > 1. Vemos que é composto.
2º caso: $p = 3k+2$. Aqui $p^2+8 = (3k+2)^2+8 = 9k^2+12k+4+8 = 9k^2+12k+12 = 3(3k^2+4k+4)$, e novamente p^2+8 se decompõe em dois fatores > 1. Portanto é composto.

Fica provado que p^2+8 é composto para todo $p \geq 5$ primo.

Para encerrar, observe que a hipótese de p ser primo é muito forte, bastaria supor que não é múltiplo de 3. Não fizemos isso porque ficaria muito óbvio que se deve considerar classes módulo 3.

Problema resolvido 5.3. a) Explique por que todo primo $p \geq 5$ é da forma $6q+1$ ou $6q+5$, para algum número natural q. **b)** Se p é um primo ≥ 5, então p^2 tem resto 1 quando dividido por 12.

Solução de a) p, assim como qualquer outro número natural, se escreve em uma das formas: $6k$, ou $6k+1$, ou $6k+2$, ou $6k+3$, ou $6k+4$, ou $6k+5$. Observemos primeiro que como p é primo e $p \geq 5$ então p é ímpar e não pode ser múltiplo de 3. Portanto p não é das formas $6k$, $6k+2$, $6k+3$ ou $6k+4$. Assim só restam as formas $6q+1$ ou $6q+5$. Observamos que existem primos dessas formas, por exemplo, 7 e 11. Mas nem todo número de uma dessas formas é primo. Você pode dar exemplos. Existem infinitos primos da forma $6k+1$? E da forma $6k+5$?

Solução de b) Usando o item a) sabemos que $p = 6k+1$ ou $p = 6k+5$. Se $p = 6k+1$ temos $p^2 = (6k+1)^2 = 36k^2+12k+1 = 12(3k^2+k)+1$. Se $p = 6k+5$ temos $p^2 = (6k+5)^2 = 36k^2+60k+25 = 36k^2+60k+24+1 = 12(3k^2+5k+2)+1$. De qualquer forma p^2 tem resto 1 quando dividido por 12.

Problema resolvido 5.4. Certo número natural é múltiplo simultaneamente de 2, 3 e 5. Justifique por que ele é múltiplo de 30.

Solução 1. Seja n um número natural múltiplo simultaneamente de 2, 3 e 5. Usando o resultado do Problema 4.10.21, página 113, já sabemos que n é múltiplo de 6, de modo que podemos escrever $n = 6q$ para algum número natural q. Observe que se conseguirmos justificar que q é múltiplo de 5, poderemos concluir, pois $q = 5t \Rightarrow n = 6 \cdot 5t = 30t$.

Para ver que q deve ser múltiplo de 5 usamos classes módulo 5:
1ª possibilidade: $q = 5l+1$. Nesse caso $n = 6q = 6(5l+1) = 30l+6 = 5(6l+1)+1$ não é múltiplo de 5, e assim essa possibilidade não ocorre.
2ª possibilidade: $q = 5l+2$. Da mesma forma se mostra que não ocorre.
3ª possibilidade: $q = 5l+3$. Da mesma forma se mostra que não ocorre.
4ª possibilidade: $q = 5l+4$. Da mesma forma se mostra que não ocorre.
5ª possibilidade: $q = 5l$. Como é a última possibilidade, ela é a que ocorre, e assim terminamos.

Solução 2. Sai mais rápido se você começar escrevendo $n = 5q$. Experimente.

5.3 Problemas

Problema 5.3.1. Justifique as Propriedades 5 e 6 enunciadas no texto.

Problema 5.3.2. Seja $n \neq 0$. Explique por que se $\sqrt{n}$ for um número natural então é um divisor de n, e, se não for número natural, não é divisor. E por que no primeiro caso n tem uma quantidade ímpar de divisores, e no segundo caso, essa quantidade é par.

Problema 5.3.3. Responda e justifique:

a) Se $n > 1$ e se $\mathcal{D}(n) = \{1, n\}$ então n é ____________________

b) Se $1 < m < n$ são três elementos de $\mathcal{D}(n)$, outro possível elemento é ________

c) Se p é primo, os exemplos indicam que $\mathcal{D}(p^2) =$ ____________________________

d) Se $p < q$ são primos, os exemplos indicam que $\mathcal{D}(pq) =$ ____________________

e) Se $p < q < r$ são primos, exemplos indicam que $\mathcal{D}(pqr) =$ ________________________________

f) Se $n > 1$, o segundo menor elemento de $\mathcal{D}(n)$ com certeza é ________

g) Se $n > 1$, o terceiro menor elemento de $\mathcal{D}(n)$ (se existir) com certeza é _______________ ou ____

Problema 5.3.4. Assinale V ou F dentro dos parêntesis se a afirmação for verdadeira ou falsa, respectivamente. Justifique.

( ) Se n é ímpar e se $m \in \mathcal{D}(n)$ então m é ímpar.

( ) Se n é par e se $m \in \mathcal{D}(n)$ então m é par.

( ) O menor múltiplo de qualquer número natural é 1.

( ) Sabendo-se de antemão que 73373 não é primo, então com certeza ele tem um divisor primo p tal que $2 < p < 270$.

( ) O menor divisor de qualquer número natural par é 2.

Problema 5.3.5. Encontre o menor número natural > 0 que é mútiplo simultaneamente de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Você tem uma justificativa?

Problema 5.3.6. Quantos números naturais de 104 a 995 são múltiplos de 7?

Problema 5.3.7. **a)** Como são os múltiplos simultâneos de 4 e de 5? **b)** Encontre a soma de todos os números de 1 a 1000 que são múltiplos de 4 e de 5.

Problema 5.3.8. Encontre a soma de todos os números de 1 a 100 que não são múltiplos de 4 ou de 5.

Problema 5.3.9. Seja n um número natural qualquer. Foi visto no Capítulo 4 que, se 3 é divisor de n^2, então 3 é divisor de n e 9 é divisor de n^2. **a)** Explique por que, se 5 é divisor de n^2, então 5 é divisor de n e 25 é divisor de n^2. **b)** Dê exemplos de n tais que 4 é divisor de n^2 mas 4 não é divisor de n e 4^2 não é divisor de n^2.

Problema 5.3.10. Quantos quadrados perfeitos existem entre 40000 e 640 000 que são múltiplos simultaneamente de 3, 4 e 5?

Problema 5.3.11. Seja x o menor de três números naturais positivos cujo produto é 720. Encontre o maior valor possível de x.

Problema 5.3.12. Explique por que 1 é o único número n com um dígito tal que todos os números $10n + 1$, $10n + 3$, $10n + 7$ e $10n + 9$ são primos.

Problema 5.3.13. Explique por que 2 é o único primo da forma $n^n + n$ para todo número natural $n \geq 1$.

Problema 5.3.14. Explique por que o único primo da forma $n^3 - 1$ é 7, qualquer que seja o número natural n.

Problema 5.3.15. Investigue quais são os primos p e q para os quais $p - q$ também é primo.

Problema 5.3.16. Explique por que para todo número natural $n \geq 2$ não existe primo entre $n! + 2$ e $n! + n$, incluindo estes.

Problema 5.3.17. Explique por que qualquer função quadrática cujos coeficientes são todos primos não pode ter uma raiz dupla.

Problema 5.3.18. Demonstre que 8, 10 e todo número natural $n > 11$ pode ser escrito como soma de dois números compostos.

Problema 5.3.19. Verifique que se $n < p^3$ para todo divisor primo p de n então n é primo ou produto de dois primos.

Problema 5.3.20. **a)** Explique por que $p^2 + m$ é composto para todo primo $p \geq 3$ e todo número natural ímpar m. **b)** Explique por que para todo número natural $m \geq 3$ o número $2m^2 + m - 6$ é composto. **c)** Verifique que se $p \geq 5$ é primo então $p^2 + 2$ é composto. **d)** Nos itens a) e c), a hipótese de p ser primo pode ser substituída por hipóteses mais fracas.

Problema 5.3.21. Explique por que se 3 é divisor de $2p$, com p primo, então $p = 3$.

Problema 5.3.22. Observe a decomposição em fatores primos de $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2$. Existem outros primos (diferentes de 2 e de 3) que dividem 288? Tente uma justificativa algébrica.

Solução algébrica. Um caminho pode ser o seguinte. Seja $p > 2$ um divisor primo de 288. Escrevemos $288 = pr$. Como p é ímpar, r é par, digamos $r = 2s$. Logo $288 = pr = p(2s) = 2ps$ $\Rightarrow 144 = ps$. Novamente $s = 2t \Rightarrow 144 = p(2t) \Rightarrow 72 = pt$. De novo t é par e $t = 2u \Rightarrow$ $72 = p(2u) = 2pu \Rightarrow 36 = pu$. Novamente $u = 2w \Rightarrow 36 = p(2w) = 2pw \Rightarrow 18 = pw$. Finalmente $w = 2x \Rightarrow 9 = px$. Como p é primo e divide 9, só pode ser $p = 3$ (é fácil ver que 3 é o único primo que é divisor de 9). Portanto 288 só tem dois divisores primos, que são 2 e 3.

Solução braçal. Arrume uma lista dos primos < 288 e faça todas as divisões. Na verdade basta considerar os primos até 144, pois entre $288/2$ e 288 não existem divisores. □

Problema 5.3.23. Seja a um número natural ≥ 2, e sejam m e n números naturais. Demonstre que a^m divide a^n se e somente se $m \leq n$.

Considere os números 2^j, para algum número natural $j \geq 1$ fixado. Certamente que os números 1, 2, 2^2, ..., 2^{j-1} e 2^j são seus divisores. Existem outros divisores? Para ver que não, estude os três problemas seguintes.

Problema 5.3.24. Seja n um número natural. Lembrando que todo número natural tem uma representação na base dois, mostre que existe um número natural t tal que $n < 2^t$.

Problema 5.3.25. Seja n um número natural. Explique por que n pode ser escrito na forma $n = 2^j b$ para algum número natural j e para algum ímpar b.

Solução. Se n for ímpar, escrevemos $n = 2^0 n$, e terminamos. Suponhamos que n seja par.

Passo 1. Escrevemos $n = 2q_1$. Se q_1 for ímpar, escrevemos $n = 2^1 b$ com $b = q_1$, e terminamos.

Passo 2. Suponhamos que q_1 seja par. Escrevemos $q_1 = 2q_2$, logo $n = 2 \cdot 2q_2$. Se q_2 for ímpar, escrevemos $n = 2^2 b$ com $b = q_2$, e terminamos.

Se q_2 for par, prosseguimos, e no j-ésimo passo obtemos $n = 2^j q_j$. Em algum passo se encontra q_j ímpar. De fato, se isso não ocorresse, teríamos, para qualquer número natural t, que $n = 2^t q_t \geq 2^t$, o que contraria o resultado do Problema 5.3.24.

Para esse passo j, escrevemos $n = 2^j b$ com $b = q_j$. □

Problema 5.3.26. Consideremos as potências 2^j de 2. Podem ser números bem grandes, por exemplo, $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$. Esses números, assim com qualquer outro número natural, é um produto de primos. Certamente que 2 é um deles. Podem haver outros? Quais são os divisores de 2^j? Crie um argumento para justificar sua resposta.

Problema 5.3.27. Sobre o número natural $n = 2^3 3^j$ sabe-se que ele tem 28 divisores e que 2 e 3 são os únicos primos que são seus divisores. Qual o valor de n?

5.4 Reconhecimento dos primos

Se um número natural $b \neq 0$ é divisor do número natural a, então existe um número natural q tal que $a = bq$. Isto significa que se os números a e b estão representados em um sistema de numeração posicional podemos dividir a por b usando o algoritmo usual de divisão, e deste cálculo resulta quociente q e resto zero:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

Por outro lado, se do algoritmo usual de divisão resultar resto $r \neq 0$, então b não é divisor de a.

Seja então um número natural $n \geq 2$, representado no sistema decimal, cuja primaridade queremos verificar. De acordo com a definição de primo, necessitamos dividir n por todos os números naturais ≥ 2 e $< n$. Se alguma dessas divisões for exata, encontramos um divisor e n não é primo. Se nenhuma divisão for exata, então n é primo.

Podemos fazer muita economia nestes cálculos lembrando que se um número n é composto então ele tem um divisor $\leq \sqrt{n}$. Observamos também que se n for par > 2 então n não é primo, e se n for ímpar então não é múltiplo de nenhum número par. Ainda, se n não for múltiplo de 3 então ele não é múltiplo de nenhum outro múltiplo de 3, o mesmo para 5, 7, e assim por diante.

Em resumo, um método elementar para verificar se $n > 5$ é primo é o seguinte: vemos primeiro se n é par, múltiplo de 3 ou de 5. Se isto ocorrer sabemos que n é composto. Caso contrário, dividimos n por todos os ímpares de 7 a $\sqrt{n}$ que não são múltiplos de 3 ou de 5. Se nenhuma divisão for exata, então n é primo.

O método mais econômico aqui é lembrar que se n for composto, então, em virtude do Teorema 5.1, ele tem um divisor primo $\leq \sqrt{n}$. Entretanto para aplicar isso necessitamos dispor de uma lista de números primos $\leq \sqrt{n}$. Podemos obter listas de números primos usando o crivo de Eratóstenes, o qual explicaremos na seção seguinte, ou utilizando uma lista de primos previamente construída, como a do Apêndice A, página 223.

Lembramos que existem muitos aplicativos computacionais algébricos munidos de algoritmos de primaridade muito rápidos e que respondem quase que de imediato se um dado número (de um tamanho não muito excepcional) é primo ou não. Que tal você mesmo construir alguns desses aplicativos? Para isso estamos investigando, começando com os algoritmos mais básicos.

Problema resolvido 5.5. Verificar a primaridade de 157.

Solução. Como $\sqrt{157} \approx 12,52$, basta, a princípio, dividir 157 por todos os números ≥ 2 e ≤ 12. Para economizar esforço observamos logo que 157 não é par e não é múltiplo de 3 ou de 5. Assim basta dividi-lo pelos ímpares de 1 a 12 que não são múltiplos de 3 ou de 5. Sobraram apenas 7 e 11. Temos

$$\begin{array}{r|l} 157 & \underline{\quad 7 \quad} \\ 17 & \ 22 \\ 3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 157 & \underline{\quad 11 \quad} \\ 47 & \ 14 \\ 3 & \end{array}$$

Como nenhuma divisão é exata, então 157 é primo. □

Problema resolvido 5.6. Verificar a primaridade de 287.

Solução. Calculamos primeiro $\sqrt{287} \approx 16,94$. Em seguida observamos que 287 não é par e não é múltiplo de 3 ou de 5. Assim basta dividi-lo pelos ímpares de 1 a 16 que não são múltiplos de 3 ou de 5. Sobraram 7, 11 e 13. Temos

$$\begin{array}{r|l} 287 & \underline{\quad 7 \quad} \\ 07 & \ 41 \\ 0 & \end{array}$$

Como deu exato podemos parar as divisões pois já sabemos que 287 não é primo e que 7 é um fator. □

Problema resolvido 5.7. Verificar a primaridade de 1811.

Solução. Como $\sqrt{1811} \approx 42,55$, basta dividir 1811 por todos os números ≥ 2 e ≤ 42. Como 1811 não é par e não é múltiplo de 3 ou de 5, basta dividi-lo por 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 e 41. Temos

$$\begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 7 \quad} \\ 41 & \ 258 \\ 61 & \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 11 \quad} \\ 71 & \ 164 \\ 51 & \\ 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 13 \quad} \\ 51 & \ 139 \\ 121 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 17 \quad} \\ 111 & \ 106 \\ 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 19 \quad} \\ 101 & \ 95 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 23 \quad} \\ 201 & \ 78 \\ 17 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 29 \quad} \\ 71 & \ 62 \\ 13 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 31 \quad} \\ 261 & \ 58 \\ 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 37 \quad} \\ 331 & \ 48 \\ 35 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1811 & \underline{\quad 41 \quad} \\ 171 & \ 44 \\ 7 & \end{array}$$

Como nenhuma divisão é exata, 1811 é primo. □

5.5 Problemas

Problema 5.5.1. Verifique se são primos ou não os números seguintes. Se algum deles não for primo, encontre o menor número primo que o divide. **a)** 179; **b)** 819; **c)** 1153; **d)** 6851.

Problema 5.5.2. Verifique que 38567 é primo.

Problema 5.5.3. Alguns números têm todo "jeito" de serem primos. Examinando cada número da lista a seguir, diga de imediato se acha que ele é primo ou não. Depois confirme usando algum recurso de primaridade.

119 203 713 817 1219 1513

Problema 5.5.4. Encontre todos os números primos que se escrevem com três dígitos decimais e tais que o produto de seus dígitos também é primo.

Problema 5.5.5. Teste e justifique o seguinte algoritmo de primaridade para $n \geq 3$ ímpar: dividir n pelos ímpares 3, 5, 7, ..., n, nessa ordem, parando as divisões quando encontrar um quociente menor do que o divisor; se não houve divisão anterior exata então n é primo.

Solução. O estudante pode testar o algoritmo com alguns números, por exemplo, 331 e 701. Quanto à justificativa, vejamos.
Justificativa 1. Suponhamos que $n \geq 3$ seja um ímpar composto. Podemos escrever $n = ab$, sendo $a > 1$ e $b > 1$ números naturais. Sem perda de generalidade podemos assumir que $a \leq b$. Como n é ímpar, segue que a é ímpar. Portanto encontramos um ímpar $a \geq 3$ tal que o quociente b da divisão de n por a é maior do que ou igual ao divisor e ao mesmo tempo a divisão é exata. Provamos dessa forma que todo $n \geq 3$ ímpar e composto não satisfaz a condição do algoritmo. Assim, se $n \geq 3$ ímpar satisfaz a condição do algoritmo então n é primo.

Justificativa 2. Observemos primeiro o seguinte. Seja s um número natural tal que $1 \leq s \leq \sqrt{n}$. Sejam q e r respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de n por s, com $n = sq+r$ e $0 \leq r < s$. Então $n = sq + r < sq + s = s(q + 1) \leq \sqrt{n}(q + 1)$. Portanto $n < \sqrt{n}(q + 1) \Rightarrow \sqrt{n} < q + 1 \Rightarrow s < q + 1 \Rightarrow s \leq q$.

Seja então $n \geq 3$ um ímpar que satisfaz à condição do algoritmo, isto é, ao dividir n pelo ímpares 3, 5, 7, ..., n, todas as divisões para as quais o quociente é maior do que ou igual ao divisor resultam resto não nulo. Então ao dividir n pelos números naturais s tais que $1 < s \leq \sqrt{n}$ obtemos restos não nulos. Segue do que foi observado na Seção 5.4 que n é primo. □

Problema 5.5.6. O seguinte algoritmo de primaridade é um refinamento daquele estudado no problema anterior. Dado $n \geq 3$ ímpar, dividir n pelos ímpares 3, 5, 7, ... seguindo a ordem crescente dessa sequência, enquanto (i) os quocientes das divisões forem maiores ou iguais aos divisores; e (ii) o resto da divisão for não nulo. **a)** Explique por que o algoritmo sempre para, isto é, existe um primeiro ímpar t para o qual ocorre (i') o quociente da divisão de n por t é $< t$ ou (ii') o resto da divisão de n por t é zero. **b)** Explique por que se o critério de parada utilizado foi (i') então n é primo, e se foi (ii') então n é composto. **c)** Aplique e verifique o algoritmo para todos os números naturais ímpares n tais que $3 \leq n \leq 31$. **d)** Aplique o algoritmo dado para verificar se 911 é primo ou não.

Problema 5.5.7. Dado um algoritmo de primaridade $\mathcal{A}$ e dado um número natural n, indicaremos por $\mathcal{A}(n)$ a quantidade máxima de divisões necessárias para, usando o algoritmo $\mathcal{A}$, determinar se n é primo ou não. Para todo número natural ímpar $n \geq 5$ calcule $\mathcal{A}(n)$ para o seguinte algoritmo de primaridade $\mathcal{A}$: dividir n pelos ímpares 3, 5, 7, ..., $n-2$; se nenhuma das divisões for exata, então n é primo.

5.6 O crivo de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene propôs, por volta de 200 a. C, um método de obtenção da lista dos números primos até um limite pré-estabelecido. Esse método passou a ser denominado *crivo de Eratóstenes*. A seguir descrevemos o método.

Listamos os números naturais com o intuito de eliminar da lista os que não são primos. Nossa lista contém ordenadamente os números naturais de 2 até um determinado número n.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, ...

O primeiro da lista, a saber, 2, é primo, pois não existe antes dele número > 1 que possa ser seu divisor. Todo múltiplo de 2 (exceto ele mesmo) não é primo, e deve ser eliminado da lista. Eliminamos um número da lista crivando-o com riscos, como segue.

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ...

O primeiro da lista, após 2, que não foi crivado é 3, que é primo, pois se fosse composto seria múltiplo de algum número < 3 e já teria sido crivado. Todo múltiplo de 3 (exceto ele mesmo) não é primo, e deve ser eliminado da lista.

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ...

O primeiro da lista, após 3, que não foi crivado é 5, que é primo, pois se fosse composto seria múltiplo de algum número < 5 e já teria sido crivado. Todo múltiplo de 5 (exceto ele mesmo) não é primo, e deve ser eliminado da lista. Repetimos esse procedimento prosseguindo até o final da lista. Dessa forma eliminamos qualquer número composto, permanecendo apenas os primos.

Para exemplificar listamos abaixo os números naturais de 2 a 50 e aplicamos o método do crivo:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~.

Os números não riscados dessa lista são os números primos ≤ 50:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Figura 5.1. Desenho representativo de Eratóstenes de Cirene. Foi um dos dirigentes da antiga biblioteca de Alexandria, e contribuiu com descobertas em vários campos da ciência, como Astronomia, Geografia e Matemática. Seu mais famoso feito foi determinar um valor aproximado para o raio da Terra utilizando Geometria Euclidiana e os raios do Sol.

Vemos assim como o método do crivo de Eratóstenes nos fornece uma maneira prática de obter os números primos menores do que ou iguais a um dado número natural. Para aplicação do método a lista dos números naturais pode ser organizada em uma tabela de várias formas, e vemos a seguir uma dessas formas em que consideramos 100 como o número limite.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

O estudante poderá reproduzir esta tabela em uma folha de escrever e crivar os números compostos, obtendo os números primos ≤ 100. Descrevemos novamente o algoritmo observando em acréscimo algumas propriedades.

i) 2 é primo pois não existe número > 1 antes dele que possa ser seu divisor. Em seguida crivamos os múltiplos $2q$ de 2 para $q > 1$, o primeiro é 4. Para crivar os múltiplos de 2 basta percorrer a lista crivando um sim outro não a partir de 4. Isto é, crivamos contando de dois em dois.

ii) O primeiro não crivado é 3, que assim é primo (se fosse composto seria múltiplo de algum número antes dele e já teria sido crivado). Crivamos os múltiplos $3q$ para $q > 1$, o primeiro ainda não crivado é 9. Para crivar os múltiplos de 3 basta percorrer a lista crivando um sim e dois não a partir de 9. Isto é, crivamos contando de três em três.

iii) O primeiro não crivado é 5, que assim é primo (se fosse composto seria múltiplo de algum número antes dele e já teria sido crivado). Crivamos os múltiplos $5q$ para $q > 1$, o primeiro ainda não crivado é 25. Crivamos contando de cinco em cinco.

iv) O primeiro não crivado é 7, que assim é primo (se fosse composto seria múltiplo de algum número antes dele e já teria sido crivado). Crivamos os múltiplos $7q$ para $q > 1$, o primeiro ainda não crivado é 49. Crivamos contando de sete em sete.

Continuamos repetindo esse procedimento até acabar a lista.

Observamos que, ao iniciar a eliminação dos múltiplos de um primo p, o primeiro que ainda não foi crivado é p^2. De fato, dado um múltiplo de p da forma sp, com $2 \leq s < p$, sabemos que s tem divisor primo, logo sp é múltiplo de um primo $< p$, e já foi crivado.

Essa observação nos fornece um critério de parada na execução do método. Ao iniciar a eliminação dos múltiplos de um primo p, examinamos p^2. Se este número não estiver na tabela, então nada mais é necessário eliminar, e o método está concluído. Em outros termos, ao aplicar o método do crivo em uma tabela de números de 1 a n, basta eliminar os múltiplos $> p$ dos primos p tais que $p \leq \sqrt{n}$.

No caso da lista dos números de 1 a 100, aplicamos o método eliminando os múltiplos dos primos 2, 3, 5 e 7 (exceto eles mesmos). O primo seguinte é 11. Como $11^2 = 121$ não se encontra na lista, paramos a crivagem. Tomamos os números não crivados, que são os primos até 100.

O método do crivo nos fornece uma maneira de encontrar uma decomposição em primos de um dado número natural n, ou verificar que n é primo. De fato, dado um número natural n, escrevemos a lista dos números naturais de 2 a n e aplicamos o método do crivo. Se n não for crivado, é primo. Se n for crivado no momento em que estamos eliminando os múltiplos de um determinado primo p_1, ficamos sabendo que p_1 é um divisor de n. Calculamos o número a tal que $n = p_1 a$. Aplicamos em seguida o método do crivo aos números naturais de 2 a a. Com isso descobrimos se a é primo ou composto, e neste caso o método nos dá um fator primo p_2 de a, e calculamos o número natural b tal que $a = p_2 b$. Temos $n = p_1 p_2 b$. Repetimos sucessivamente o procedimento e, após uma quantidade finita de passos, obtemos uma decomposição de n em fatores primos.

Conforme já observamos na seção anterior, outra forma de obter uma decomposição de n em fatores primos consiste em primeiramente listar todos os primos $\leq \sqrt{n}$ (para o que podemos usar o método do crivo, ou lançar mão de uma lista disponível). Dividimos n por esses primos até encontrar um primeiro divisor p_1 (ou verificar que n é primo). Escrevemos $n = p_1 a$ e reaplicamos o processo a a, e assim por diante.

O método do crivo também nos fornece uma maneira de encontrar todos os primos divisores de um dado número natural n. Montamos uma tabela dos números de 2 a n e procedemos à crivagem sem aplicar o critério de parada "p^2". Crivamos os números usando os primos $\leq n/2$, lembrando que entre $n/2$ e n não existem divisores de n. Anotamos todos os números que crivam n, e esses são todos os primos que são seus divisores.

¿Dado um número natural n, são, a princípio, problemas diferentes:
1) encontrar uma decomposição de n em fatores primos;
2) encontrar todos os primos que são fatores de n.

Problema resolvido 5.8. a) Encontre uma decomposição em fatores primos de 13547. **b)** Encontre todos os primos divisores de 13547.

Indicação da solução de a) Se quisermos usar o método do crivo montamos uma tabela dos números de 2 a 13547 e procedemos à crivagem até encontrar o primeiro primo divisor de 13547, que é 19. Calculamos $13547/19 = 713$, e escrevemos $13547 = 19 \cdot 713$. Vemos a seguir qual o primeiro primo que criva 713, que é 23. Calculamos $713/23 = 31$, e escrevemos $13547 = 19 \cdot 23 \cdot 31$. Ao terminar o método do crivo vemos que 31 não é crivado, de modo que é primo. Isso nos dá uma decomposição em fatores primos de 13547.

Indicação da solução de b) Montamos uma tabela dos números de 2 a 13547 e procedemos à crivagem até o final da tabela, sem aplicar o critério de parada do crivo (ou parando em 13547/2). Ao terminar vemos que os primos que dividem 13547 são 19, 23 e 31. □

O conhecimento dos primos divisores de um dado número natural facilita a determinação de todos os divisores desse número (primos e não primos). Por exemplo, sabendo que 19, 23 e 31 são (todos) os primos divisores de 13547, vemos que seus divisores são: 1, 19, 23, 31, $19 \cdot 23 = 437$, $19 \cdot 31 = 589$, $23 \cdot 31 = 713$ e 13547. Por que não existem outros divisores?

5.7 Problemas

Problema 5.7.1. Se você completou o crivo de Eratóstenes para a tabela de números de 2 a 100 disposta no texto acima pode responder às questões: **a)** encontre uma decomposição em fatores primos de 91; **b)** encontre todos os primos que são divisores de 91. **c)** Que regularidade você observa nas respostas dos itens a) e b)?

Problema 5.7.2. Obtenha a lista dos números primos ≤ 300 usando o método do crivo. Ao implementar o algoritmo do crivo esteja atento à perguntas do próximo problema.

Problema 5.7.3. Tome por base a aplicação do método do crivo para números ≤ 300. **a)** Encontre uma decomposição em fatores primos de 273. **b)** Encontre todos os primos que são divisores de 273. **c)** Que regularidade você observa nas respostas dos itens a) e b)? **d)** Responda às mesmas perguntas, mas agora considerando o número 294.

Problema 5.7.4. Seja $n > 1$ um número natural, e sejam p_1, p_2, ..., p_s todos os seus divisores primos. Explique por que todo divisor $d > 1$ de n é um desses primos, ou um produto de alguns desses primos (ou de todos, e possivelmente com repetição).

Problema 5.7.5. Usando os resultados do Problema 5.7.3 encontre todos os divisores de 273 e de 294.

Problema 5.7.6. Já sabemos do resultado do Problema 5.3.22 que os únicos primos divisores de $288 = 2^5 \cdot 3^2$ são 2 e 3. Para estabelecer esse resultado usamos recursos algébricos. Se você for um estudante paciente pode usar o método do crivo para chegar ao mesmo resultado. De qualquer forma encontre agora todos os divisores de 288.

Problema 5.7.7. Observe a seguinte tabela de números naturais, listados em seis colunas:

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42

Aplique o método do crivo a esta tabela. Observe que os números primos, com exceção de 2 e 3, se encontram em apenas duas colunas. Isto vai continuar ocorrendo mesmo se aumentarmos indefinidamente a tabela? Qual a explicação?

Problema 5.7.8. Ao fazermos uma lista de números naturais com o intuito de aplicar o método do crivo, podemos omitir os pares, e assim economizar algum esforço. Aplique o método do crivo à seguinte tabela:

	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
101	103	105	107	109	111	113	115	117	119

Ao listar os números primos assim obtidos, não se esqueça de acrescentar o primo 2.

Problema 5.7.9. Durante a aplicação do método do crivo, ao eliminar os múltiplos de um primo p, usamos contagem. Em vez de calcular o valor de um determinado múltiplo sp, contamos p valores após o último eliminado, e este é o múltiplo de p seguinte. Verifique que este estratagema funciona mesmo em uma lista como a do Problema 5.7.8.

Problema 5.7.10. Encontre uma decomposição em fatores primos de: **a)** 120; **b)** 375; **c)** 539; **d)** 2015; **e)** 1 455 521.

Problema 5.7.11. Encontre os divisores de: **a)** 120; **b)** 375; **c)** 539; **d)** 2015; **e)** 1 455 521.

5.8 Infinitude dos primos

Uma das mais importantes propriedades que devemos investigar sobre os números primos é sua finitude ou infinitude. Existe uma quantidade finita ou infinita de primos?

A resposta a essa pergunta determina todo o procedimento futuro em nossas pesquisas sobre os números primos. Se existir uma quantidade finita de primos podemos ver se é possível listá-los, e assim, por inspeção, determinar todas as suas propriedades, e por extensão determinar propriedades dos números naturais. Por outro lado, se sua quantidade for infinita precisaremos usar procedimentos mais criativos para investigá-los.

Embora existam infinitos números naturais, isto não implica que existem infinitos primos. De fato, com uma quantidade finita de primos podemos fabricar infinitos números naturais. Por exemplo, o primo 2 gera os números 2^j, e os primos 2 e 3 geram 2^j3^i, com $j \geq 0$ e $i \geq 0$ naturais. Assim, a princípio, poderia ocorrer que uma quantidade finita de primos gerassem todos os números naturais.

Os matemáticos da Antiga Grécia conheciam a resposta à questão da finitude ou infinitude dos primos: existem infinitos números primos. Euclides, em *Os Elementos*, apresenta uma demonstração para esse fato. É muito importante para o estudante compreender o argumento de Euclides. Estude-o detalhadamente.

Teorema 5.9 (Euclides)**.** *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Consideremos uma quantidade finita de primos, digamos p_1, p_2, ..., p_n, com $n \geq 1$. Com esses primos fabricamos o número natural $A = p_1p_2 \ldots p_n + 1$. Como $A > 1$, o Teorema 4.22, visto na página 109, garante que A tem um divisor primo p. Portanto se dividirmos A por p o resto é zero. Então p não pode ser um dos primos p_1, p_2, ..., p_n considerados inicialmente. De fato, se p fosse um desses primos, p dividiria o produto $p_1p_2 \ldots p_n$, logo dividiria $A - p_1p_2 \ldots p_n$, o que não é possível, pois essa diferença é 1, e $p > 1$.

Concluímos do exposto acima que, qualquer que seja o conjunto finito de números primos, sempre existe um primo que não está nesse conjunto. Isto significa que a quantidade de primos é infinita. □

Figura 5.2. Euclides de Alexandria, em sua obra *Os Elementos*, demonstra a infinitude dos números primos no Livro IX, Proposição 20, com um argumento muito semelhante ao que usamos no Teorema 5.9.

Existem diversas demonstrações da infinitude dos primos. Uma coleção delas é apresentada no Capítulo 1 de [93]. Confira também nossa lista de problemas 5.9.

Existem ainda muitos resultados demonstrando a infinitude de números primos de um determinado formato. Por exemplo:

Problema resolvido 5.10. Existem infinitos números primos da forma $3n + 2$.

Solução. Exemplos de números primos da forma $3n+2$ são: 2, 5, 11, 17, etc. Consideremos uma quantidade finita de primos > 2 da forma $3n+2$, denominando-os p_1, p_2, ..., p_m. Consideremos o número $A = 3p_1p_2 \dots p_m + 2$. De acordo com o Problema Resolvido 4.27 (página 110) A tem um fator primo p da forma $3n + 2$. Como A é ímpar temos $p > 3$. Se p fosse um dos p_i para algum i isto implicaria que p seria um divisor de $A - 3p_1p_2 \dots p_m$, portanto de 2, o que é absurdo. Segue que $p \neq p_i$ para todo i. Concluímos que dado qualquer conjunto finito de primos da forma $3n + 2$ sempre existe um primo dessa forma fora do conjunto. Segue que existem infinitos primos da forma $3n + 2$. □

Johann Dirichlet demonstrou em 1837 o seguinte resultado mais geral: *Se $d \geq 2$ e $a \neq 0$ são números naturais sem fatores primos comuns, então a progressão aritmética a, $a + d$, $a + 2d, \dots$ contém uma infinidade de números primos.*

5.9 Problemas

Problema 5.9.1. Existem infinitos primos da forma $6n + 5$?

Problema 5.9.2. No Teorema de Dirichlet enunciado logo acima, a condição de que "$d \geq 2$ e $a \neq 0$ não têm fatores primos comuns" é sempre necessária?

Problema 5.9.3. **a)** Explique por que se $m > 1$ e n são números naturais tais que m divide $n! + 1$ então $m > n$. **b)** Conclua que para todo número natural n existe um primo p tal que $p > n$. **c)** Use este resultado para dar outra demonstração (diferente da do texto) de que existem infinitos números primos. Segundo o autor de [93], página 3, esta demonstração é atribuída a Charles Hermite.

Problema 5.9.4. Complete os detalhes da seguinte variante da demonstração de Euclides da infinitude dos números primos. Se $A = p_1p_2 \dots p_n$ e se p é um primo que divide $A - 1$ então $p \neq p_i$ para todo i. Esta demonstração foi observada por Ernst Kummer (confira [93], página 3).

Problema 5.9.5. Demonstre que existem infinitos primos da forma $4n + 3$ (naturalmente sem utilizar o Teorema mais geral de Dirichlet).

Problema 5.9.6. Vamos denominar o n-ésimo número primo por p_n. Portanto $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. Inspirados na demonstração de Euclides da infinitude dos primos, consideremos os números naturais $E_n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$. Se E_n é primo, dizemos que é um *primo de Euclides*. Comprove que E_n, para $1 \leq n \leq 5$, são primos de Euclides, mas E_6, E_7 e E_8 não são.

Não se sabe se existem infinitos primos de Euclides.

5.10 O máximo divisor comum

O exame dos divisores comuns de dois ou mais números naturais pode nos revelar sua natureza recíproca. Particularmente importante é o maior divisor comum.

Dado um número natural a, continuamos indicando por $\mathcal{D}(a)$ o conjunto dos divisores de a. Já observamos que 1 está em $\mathcal{D}(a)$ qualquer que seja a, e que se $a \neq 0$ então $\mathcal{D}(a)$ é finito. Portanto, dados números naturais a e b não simultaneamente nulos o conjunto $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ é não vazio e finito. Segue que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ tem um elemento máximo. Isto justifica a seguinte definição.

Definição 5.11. Dados números naturais a e b não simultaneamente nulos o elemento máximo do conjunto $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ chama-se *máximo divisor comum* de a e b, e é indicado por $\text{mdc}(a, b)$. Se $a = 0$ e $b = 0$ convém definir $\text{mdc}(0, 0) = 0$.

As mesmas observações se aplicam para três ou mais números naturais a_1, a_2, ..., a_n, e da mesma forma se define $\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Exemplo 5.12. $\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $\mathcal{D}(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Portanto $\mathcal{D}(12) \cap \mathcal{D}(18) = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\text{mdc}(12, 18) = 6$.

Exemplo 5.13. Observemos que $\mathcal{D}(15) = \{1, 3, 5, 15\}$, $\mathcal{D}(30) = \{1, 2, 3, 5, 10, 15, 30\}$ e $\mathcal{D}(75) = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$. Portanto

$$\mathcal{D}(15) \cap \mathcal{D}(30) \cap \mathcal{D}(75) = \{1, 3, 5, 15\} \text{ e } \text{mdc}(15, 30, 75) = 15$$

Algumas propriedades do máximo divisor comum de fácil observação são as seguintes:

Propriedade 1. $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$ quaisquer que sejam os números naturais a e b.

De fato, se $a = 0$ e $b = 0$ temos $\text{mdc}(a, b) = 0 = \text{mdc}(b, a)$. Se a e b não são simultaneamente nulos, então $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(a)$ quaisquer que sejam os números naturais a e b.

Propriedade 2. Se o número natural $a \neq 0$ é um divisor do número natural b então $\text{mdc}(a, b) = a$.

De fato, a é elemento de $\mathcal{D}(b)$ e é o maior elemento de $\mathcal{D}(a)$. Portanto a é o maior elemento de $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$, ou seja, $\text{mdc}(a, b) = a$.

Propriedade 3. $\text{mdc}(0, a) = a$ qualquer que seja o número natural a.

Se $a = 0$ temos $\text{mdc}(0, a) = 0 = a$. Suponhamos $a \neq 0$. Como $\mathcal{D}(0) = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ temos $\mathcal{D}(0) \cap \mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(a)$. Como a é o maior elemento de $\mathcal{D}(a)$ segue a validade da propriedade.

Propriedade 4. Se a e b são números naturais não simultaneamente nulos então $mdc(a, b) \geq 1$.

O estudante pode se certificar da validade da Propriedade 4.

Uma situação que devemos destacar é que existem números que não têm divisores comuns > 1. Por exemplo, $\mathcal{D}(91) = \{1, 7, 13, 91\}$ e $\mathcal{D}(187) = \{1, 11, 17, 187\}$. Portanto $\mathcal{D}(91) \cap \mathcal{D}(187) = \{1\}$ e $\text{mdc}(91, 187) = 1$. Esses números recebem uma denominação especial.

Definição 5.14. Os números naturais a e b chamam-se *relativamente primos* quando $\text{mdc}(a, b) = 1$. Neste caso a e b também são denominados *primos entre si* ou *coprimos*. Da mesma forma, se os números naturais a_1, a_2, ..., a_n são tais que $\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, dizemos que são relativamente primos (ou primos entre si, ou ainda coprimos).

O uso da definição para o cálculo do máximo divisor comum de dois números naturais pode ser bastante desconfortável. Por exemplo, se quisermos calcular $\text{mdc}(28997, 9211)$, temos que realizar muitos cálculos até verificar que $\mathcal{D}(28997) = \{1, 107, 271, 28997\}$ e $\mathcal{D}(9211) = \{1, 61, 151, 9211\}$, e concluir que são relativamente primos.

Os antigos matemáticos gregos observaram que o cálculo do máximo divisor comum de dois números naturais pode ser drasticamente simplificado mediante o uso da divisão. De fato, dados números naturais a e $b \neq 0$, sabemos que existem números naturais q e r tais que $a = bq + r$. Dessa identidade percebemos que os divisores comuns a a e a b também são divisores de r. Mais exatamente temos o

Teorema 5.15 (Euclides)**.** *Se a, b, q e r são números naturais tais que $a = bq + r$, então* $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Demonstração. Se $b = 0$ temos $a = r$ e $\text{mdc}(a, b) = a = r = \text{mdc}(b, r)$. Suponhamos $b \neq 0$. Todo divisor comum de a e b também é divisor da combinação linear $a - bq$, portanto de r. Em outros termos, todo divisor comum de a e b é divisor comum de b e r. Por outro lado, todo divisor comum de b e r é divisor da combinação linear $bq + r$, portanto é divisor de a. Em outros termos, todo divisor comum de b e r é divisor comum de a e b. Isto quer dizer que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$. Em consequência estes conjuntos têm o mesmo máximo. Fica assim demonstrado que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$. □

Escólio 5.16. *Se a, b, q e r são números naturais tais que $a = bq + r$, então os divisores comuns de a e b são também os divisores comuns de b e r.*

Demonstração. A demonstração do Escólio está contida na demonstração do Teorema 5.15. □

Escólio 5.17. *Se b, q e r são números naturais então* $\text{mdc}(bq + r, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Demonstração. Esse escólio é apenas outra maneira de escrever o enunciado do Teorema 5.15. □

O resultado deste Teorema pode ser utilizado para construir um algoritmo que permite calcular o máximo divisor comum de dois números naturais com relativa facilidade. Este algoritmo é conhecido há muito tempo, e está descrito em *Os Elementos*, de Euclides. Por isso foi denominado *algoritmo euclidiano* pela posteridade.

A ideia surge quando observamos que, dados números naturais a e $b \neq 0$, existem números naturais q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$, e o Teorema acima garante que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$. Assim sendo aparentemente compensa calcular $\text{mdc}(b, r)$ em vez de $\text{mdc}(a, b)$, já que $r < b$. Uma ideia melhor ainda é dividir b por r e novamente diminuir os valores dos números. Assim, se $b = q_1 r + s$, com $0 \leq s < r$, temos $\text{mdc}(b, r) = \text{mdc}(r, s)$. Prosseguindo obtemos uma sequência $0 \leq \ldots < u < t < s < r$, que, após uma quantidade finita de passos, atinge o valor zero. Se v é o último resto não nulo temos $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(v, 0) = v$.

Dessa forma, sem nenhum esforço além de o de efetuar divisões se pode calcular o máximo divisor comum de dois números naturais quaisquer. Evitamos assim a necessidade de calcular os divisores dos números, o que em geral exige um esforço muito maior.

Problema resolvido 5.18. Calcule $\mathrm{mdc}(1365, 231)$ usando o algoritmo euclidiano.

Solução. Efetuamos as divisões sucessivas:

$$\begin{aligned} 1365 &= 5 \times 231 + 210 \\ 231 &= 1 \times 210 + 21 \\ 210 &= 10 \times 21 + 0 \end{aligned}$$

Vemos que o último resto não nulo é 21, portanto $\mathrm{mdc}(1365, 231) = 21$.

Podemos escrever também:

$$\mathrm{mdc}(1365, 231) = \mathrm{mdc}(231, 210) = \mathrm{mdc}(210, 21) = \mathrm{mdc}(21, 0) = 21$$

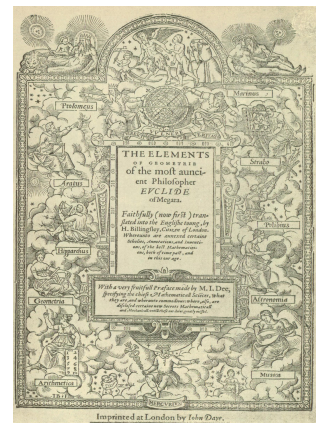
□

THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the moſt aunci-ent Philoſopher
EVCLIDE
of Megara.

Faithfully (now firſt) tranſlated into the Engliſhe toung, by H. Billingſley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inuentions, of the beſt Mathematiciens, both of time paſt, and in this our age.

With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, ſpecifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, alſo, are diſcloſed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, vntill theſe our daies, greatly miſſed.

Imprinted at London by Iohn Daye.

Figura 5.3. Digitalização da capa da primeira edição de Sir Henry Billingsley, em língua inglesa, de *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, datada de 1570. Euclides escreveu esse tratado de Matemática por volta de 300 a. C. Os tomos de VII a IX tratam da Teoria dos Números. Euclides define número primo e demonstra, entre outros resultados, que são em quantidade infinita. Define o mdc e o mmc e descreve o método que hoje denominamos algoritmo euclidiano para o cálculo do mdc.

Bastante útil na Teoria dos Números é o conceito de mínimo múltiplo comum. Começamos lembrando que, dado um número natural a, seus múltiplos são os números $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, ..., em geral, $n \cdot a$ para todo número natural n. Se $a, n \geq 1$ o múltiplo $n \cdot a$ se diz múltiplo positivo. Note que zero só tem um múltiplo, que é ele mesmo. Assim zero não tem múltiplos positivos.

Dado um número natural $a \neq 0$, indicamos por $\mathcal{M}(a)$ o conjunto dos múltiplos positivos de a. Por exemplo, $\mathcal{M}(3) = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

Notemos que, dados números naturais $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o número ab é um múltiplo comum, assim como $2ab$, $3ab$, ... Dessa forma o conjunto $\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$ nunca é vazio.

Definição 5.19. Dados números naturais $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o elemento mínimo do conjunto $\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$ chama-se *mínimo múltiplo comum* de a e b, e é indicado por $\mathrm{mmc}(a, b)$. Se $a = 0$ ou $b = 0$ convém definir $\mathrm{mmc}(a, b) = 0$.

Por exemplo, $\mathcal{M}(6) \cap \mathcal{M}(9) = \{18, 36, 54, \ldots\}$, portanto $\mathrm{mmc}(6, 9) = 18$.

O estudante está convidado nos Problemas 5.11.19 a 5.11.22 abaixo a detalhar propriedades do mmc.

5.11 Problemas

Problema 5.11.1. Cacule $\text{mdc}(54, 66)$ usando a definição de mdc:

$\mathcal{D}(54) = \{$ ____

$\mathcal{D}(66) = \{$ ____

$\mathcal{D}(54) \cap \mathcal{D}(66) = \{$ __________________________________

Resposta: $\text{mdc}(54, 66) =$ ____________________

Problema 5.11.2. Calcule e justifique brevemente:

(i) $\text{mdc}(13245, 5) =$ ____

(ii) $\text{mdc}(17, 3) =$ ____

(iii) para todo número natural a se tem $\text{mdc}(a, 1) =$ ______________________

(iv) dados m e n números naturais, se tem $\text{mdc}(n, mn) =$ ____________________

(v) para todo número natural n se tem $\text{mdc}(n, n+1) =$ ____________________

(vi) para todo número natural n ímpar se tem $\text{mdc}(n, n+2) =$ ________________

(vii) para todo número natural n par se tem $\text{mdc}(n, n+2) =$ _________________

Problema 5.11.3. Cacule $\text{mmc}(21, 35)$ usando a definição de mmc:

$\mathcal{M}(21) = \{$ ____

$\mathcal{M}(35) = \{$ ____

$\mathcal{M}(21) \cap \mathcal{M}(35) = \{$ ______________________________________

Resposta: $\text{mmc}(21, 35) =$ __________________

Problema 5.11.4. Calcule mentalmente:

(i) $\text{mmc}(13245, 5) =$ _________________________

(ii) $\text{mmc}(17, 3) =$ ___________________________

(iii) para todo número natural $a > 0$ tem-se $\text{mmc}(a, 1) =$ ____

(iv) dados $m > 0$ e > 0 números naturais, tem-se $\text{mmc}(n, mn) =$ _

Problema 5.11.5. Calcule $\text{mdc}(n, 2n + 1)$ para todo número natural n.

Problema 5.11.6. Ache $\text{mdc}(12k + 10, 3k + 2)$ para todo número natural k.

Problema 5.11.7. Explique por que se p e q são primos diferentes então são relativamente primos.

Problema 5.11.8. Explique por que se o primo p não é divisor do número natural $b > 1$ então p e b são relativamente primos.

Problema 5.11.9. Justifique por que se os números naturais a e b não são relativamente primos então existe um primo p que é divisor comum de ambos.

Problema 5.11.10. Justifique por que se p é primo então para todo número natural a se tem $\text{mdc}(p, a) = 1$ ou $\text{mdc}(p, a) = p$. Conclua que ou a e p são relativamente primos ou a é múltiplo de p.

Problema 5.11.11. Explique por que o número natural $p > 1$ é primo se e somente se para todo número natural a se tem $\text{mdc}(p, a) = 1$ ou p é divisor de a.

Problema 5.11.12. Justifique por que os números naturais $a \geq 2$ e $b \geq 2$ não têm primo em comum em sua decomposição em fatores primos se e somente se eles são relativamente primos.

Problema 5.11.13. Justifique por que se os números naturais a e b são relativamente primos e se a_1 e b_1 são divisores respectivamente de a e b então a_1 e b_1 são relativamente primos.

Problema 5.11.14. Calcule $\text{mdc}(32277, 14973)$ usando o algoritmo euclidiano.

Problema 5.11.15. Calcule $\text{mdc}(123469, 2849)$ utilizando: **a)** o algoritmo euclidiano; **b)** diretamente através da definição de máximo divisor comum. Compare o esforço de cálculo de um método em relação ao outro.

Problema 5.11.16. Vimos que $\mathcal{D}(12) \cap \mathcal{D}(18) = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\text{mdc}(12, 18) = 6$. Examinando os divisores comuns de 12 e 18, qual sua relação com o máximo divisor comum? Examine outros exemplos. Escreva uma conjectura geral. Alguma demonstração?

Problema 5.11.17. Usando o resultado do Problema 5.11.16 verifique que

$$\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \text{mdc}(a_{n-1}, a_n))$$

quaisquer que sejam os números naturais a_1, a_2, ..., a_n. Mostre como se pode utilizar recursivamente o algoritmo euclidiano para calcular o máximo divisor comum de $n \geq 3$ números naturais. Aplique a ideia para calcular $\text{mdc}(11571, 1729, 637)$.

Problema 5.11.18. Dê exemplos de números naturais a, b e c relativamente primos mas que não são relativamente primos quando tomados dois a dois.

Problema 5.11.19. Examinando exemplos variados de conjuntos $\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$, liste e justifique propriedades do mmc.

Problema 5.11.20. Você deve ter percebido, examinando vários exemplos, que se p e q são primos diferentes, parece que vale que $\text{mmc}(p, q) = pq$. Tente uma demonstração geral usando recursos algébricos. Identifique algum resultado que você precisa para demonstrar isso.

Problema 5.11.21. Examinando exemplos variados de $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(a, b)$, obtenha uma propriedade que os relacione em uma mesma fórmula. Alguma demonstração?

Problema 5.11.22. Defina mmc de três ou mais números naturais e mostre que sua definição é consistente.

5.12 Algumas identidades algébricas importantes

Vejamos algumas identidades importantes para investigar números primos e compostos. Mas antes estudemos um exemplo simples de uso de uma identidade algébrica nesse contexto.

Problema resolvido 5.20. Investigar para quais números naturais a diferença de seus quadrados é primo.

Solução. Queremos descobrir todos os números naturais a e b tais que $b^2 - a^2$ seja primo.

O estudante pode calcular alguns casos se isso lhe deixar mais seguro na compreensão do enunciado. Observamos de imediato que não queremos que $b^2 - a^2$ seja negativo e nem zero, de modo que impomos logo a condição $b > a$. Se $a = 0$ então $b^2 - a^2 = b^2$ nunca é primo (por quê?) Supomos então que $b > a > 0$, ou $b > a \geq 1$.

Já que estamos falando de identidades, não há como deixar de lembrar que

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

é uma relação algébrica muito conhecida dos estudantes do Ensino Fundamental. Ela mostra que $b^2 - a^2$ se decompõe em um produto de dois números. Como $b + a \geq 2$, se ocorrer também que $b - a \geq 2$ então já sabemos que $b^2 - a^2$ é composto.

Portanto, para que $b^2 - a^2$ seja primo, a única chance é que $b - a = 1$, ou $b = a + 1$. Nesse caso

$$b^2 - a^2 = (a + 1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$$

de modo que $b^2 - a^2$ é primo se e somente se $b = a + 1$ e $2a + 1 = a + b$ é primo. Exemplo:

$$a = 3, b = 4 \Rightarrow b^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \text{ que é primo}$$

□

Uma identidade muito usada em Teoria dos Números é:

Teorema 5.21 (Fórmula do binômio)**.** *Sejam x e y números reais e $n \geq 1$ um número natural. Então*

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \tag{5.1}$$

Esta relação é conhecida também sob o nome de "fórmula do binômio de Newton", referindo-se ao físico e matemático Isaac Newton.

Os números $\binom{n}{i}$, chamados *números binomiais*, são definidos por

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n - i)!} \tag{5.2}$$

quaisquer que sejam os números naturais $0 \leq i \leq n$. Veremos logo abaixo um exemplo de uso dessa identidade.

Outras identidades muito úteis:

Sejam a, b e $n \geq 2$ números naturais. Então

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5.3}$$

Sejam a, b e $n > 0$ números naturais. Então

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \tag{5.4}$$

e

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}) \tag{5.5}$$

Consideramos o Teorema 5.21 conhecido do estudante. De qualquer forma o Problema 10.8.1, página 212, traz mais informações. As identidades seguintes, se não o forem, podem ser demonstradas diretamente. Basta multiplicar os fatores dos segundos lados das identidades.

Segue um exemplo de aplicação da fórmula binomial 5.1:

Proposição 5.22 (Critério de divisibilidade por três e por nove)**.** *O número* $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ *é múltiplo de* 3 *(respectivamente de* 9*) se e somente se* $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ *for múltiplo de* 3 *(respectivamente de* 9*).*

Demonstração. Para todo número natural j temos

$$\begin{aligned} 10^j &= (9+1)^j \\ &= 9^j + \binom{j}{1} 9^{j-1} + \ldots + \binom{j}{j-1} 9 + 1 \\ &= 9\left[9^{j-1} + \binom{j}{1} 9^{j-2} + \ldots + \binom{j}{j-1}\right] + 1 \\ &= 9q_j + 1 \end{aligned}$$

em que $q_j = 9^{j-1} + \binom{j}{1} 9^{j-2} + \ldots + \binom{j}{j-1}$ é um número natural. Portanto

$$\begin{aligned} (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}} &= (9q_n + 1)a_n + (9q_{n-1} + 1)a_{n-1} + \ldots + (9+1)a_1 + a_0 \\ &= 9q + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

para um certo número natural q. Portanto $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ é múltiplo de 3 (respectivamente de 9) se e somente se $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ for múltiplo de 3 (respectivamente de 9). □

Problema resolvido 5.23. Entre 18 números naturais consecutivos quaisquer com três dígitos sempre existe pelo menos um que é múltiplo da soma de seus dígitos.

Solução. O estudante, se achar necessário, pode considerar alguns casos e verificar que efetivamente ocorre essa propriedade. Pode também decidir examinar todos os casos possíveis, pois existe uma quantidade finita deles.

Outra opção é partir logo para o uso de relações algébricas. Queremos um número $n = (abc)_{dez}$ de três dígitos tal que

$$n = q(a+b+c) \iff 100a + 10b + c = q(a+b+c)$$

para algum q. Manipulando essa relação de todas as formas quase nada conseguimos. E o que interessa o fato de que esse número está em uma lista de 18 consecutivos? Qualquer número está!

Vemos que precisamos de outra estratégia. Procuremos fatos relacionados que já conhecemos de modo que possamos estabelecer alguma analogia. Procurando pela memória ou percorrendo esse mesmo livro, encontramos:

1º fato: a soma dos dígitos de um número apareceu na Proposição 5.22 logo acima: um número é múltiplo de 3 ou de 9 se e somente se a soma de seus dígitos for múltiplo de 3 ou de 9, respectivamente.

Ainda não sabemos se vamos usar isso ou não, mas chama a atenção que 3 e 9 são divisores de 18.

Por outro lado, já vimos alguma propriedade sobre números consecutivos: foi visto no Problema Resolvido 4.16, na página 103, que "dados três números naturais consecutivos quaisquer, exatamente um deles é múltiplo de 3". Usando analogia temos

2º fato: Dados 18 números naturais consecutivos quaisquer, exatamente um deles é múltiplo de 18.

O estudante pode demonstrar esse fato imitando o argumento usado em 4.16. Mas, para se convencer, não é preciso escrever muito: dados 18 números consecutivos, os dividimos um a um por 18, em ordem. Obtemos um a um os dezoito restos possíveis 0, 1, 2, ..., 17 em ordem cíclica, não necessariamente começando por zero, mas certamente o zero será obtido em algum momento. E aí temos um número múltiplo de 18.

Seja $n = (abc)_{dez}$ esse número. Sendo n múltiplo de 18, também é múltiplo de 9. Em virtude do fato 1 elencado acima, $a + b + c$ é múltiplo de 9.

Agora precisamos estar atentos e observar que não existem muitas opções para $a + b + c$. Primeiro notemos que a, b e c são algarismos, com $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq b, c \leq 9$. Portanto $1 \leq a+b+c \leq 27$. Ainda, como deve ser múltiplo de 9, só temos as possibilidades $a+b+c = 9$, 18 ou 27. Se $a + b + c = 27$ então $n = 999$, que não é múltiplo de 18, e assim o descartamos. Logo $a+b+c = 9$ ou 18, de modo que $a+b+c$ divide 18, que divide n, e assim $a+b+c$ divide n. Terminamos. □

Para encerrar o exame desse problema fazemos uma pergunta para o estudante. Em um certo momento da demonstração escrevemos: "Então n é múltiplo de 18, portanto também é múltiplo de 9". Poderíamos ter escolhido 3 em vez de 9, ou, quem sabe, 6, ou 2. Por que preferimos 9?

Problema resolvido 5.24. Demonstre que, para todo número natural $m \geq 2$, se $2^m - 1$ é primo então m é primo.

Solução. Seja $m = rs$ uma decomposição qualquer de m como produto de números naturais. Queremos mostrar que, se $2^m - 1$ é primo, necessariamente se tem $r = 1$ ou $s = 1$. Começamos observando que

$$2^m - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1$$

Usando a identidade 5.3 com $a = 2^r$, $b = 1$ e $n = s$ temos

$$2^m - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \ldots + 1)$$

Como $2^m - 1$ é primo, segue que $2^r - 1 = 1$ ou $(2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \ldots + 1 = 1$. Portanto $r = 1$ ou $s = 1$, respectivamente. Provamos que m é primo. □

5.13 Problemas

Problema 5.13.1. **a)** Explique por que para todo número natural n se tem $10^n = 11q_n + (-1)^n$ para algum número natural q_n. **b)** Justifique por que um número natural $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{\text{dez}}$ é múltiplo de 11 se e somente se $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ for múltiplo de 11. Teste esse método em alguns exemplos.

Problema 5.13.2. Investigue para quais números naturais n o número $6^n - 1$ é primo.

Problema 5.13.3. **a)** Demonstre que $10^{2n} - 1$ é múltiplo de 11 para todo número natural n. **b)** Prove que $10^{2n+1} + 1$ é múltiplo de 11 para todo número natural n.

Problema 5.13.4. Caracterize os múltiplos de 11 de um só algarismo.

Problema 5.13.5. Determine todos os números naturais n para os quais $n^3 + 1$ é primo.

Problema 5.13.6. Determine todos os números naturais n para os quais $8^n + 1$ é composto.

Problema 5.13.7. Prove que a diferença entre um número natural e a soma dos dígitos de sua representação decimal é múltiplo de 9.

Problema 5.13.8. Veja se existem versões da Proposição 5.22 e do Problema 5.13.7 para números representados em uma base β qualquer.

Problema 5.13.9. Encontre o resto da divisão de $1 + 4^n$ por 3 para todo número natural n.

Problema 5.13.10. Sabendo-se que $a^n - 1$ é primo, o que se pode dizer sobre os números naturais a e n?

Problema 5.13.11. Com o auxílio do Teorema 5.21 demonstre que m^n e m têm a mesma paridade, quaisquer que sejam os números naturais $m \geq 0$ e $n \geq 1$.

Problema 5.13.12. Encontre todos os números primos que se escrevem como soma de dois cubos (não necessariamente diferentes).

Problema 5.13.13. Encontre todos os números primos que se escrevem como soma de duas potências quínticas (não necessariamente diferentes).

5.14 Comentários adicionais

No capítulo anterior vimos como a Escola Pitagórica deu início à Teoria dos Números, e como suas investigações trouxeram inúmeras perguntas, e citamos algumas delas:

1. A quantidade de números primos é finita ou infinita?
2. Como testar a primaridade de um número?
3. Como produzir uma lista de números primos da forma mais rápida e cômoda possível?
4. Dado um número composto, como encontrar seus fatores?
5. A decomposição de um número natural $n \geq 2$ como produto de fatores primos é única?
6. A sequência dos números primos tem uma regra de formação que possa facilitar sua obtenção? Existe uma fórmula adequada que forneça o n-ésimo número primo?

Neste capítulo trabalhamos com as quatro primeiras questões. Verificamos que existem infinitos números primos. Vimos que para verificar a primaridade de um número natural $n > 2$ basta dividi-lo por todos os primos $\leq \sqrt{n}$. Estudamos o método do crivo, que permite listar números primos e encontrar uma decomposição de um número composto como produto de primos.

Devemos observar entretanto que os métodos de crivagem são considerados lentos, mesmo quando implementados em computadores digitais. Devido a isso a Teoria dos Números desenvolveu, e continua desenvolvendo, novos métodos que permitem testar a primaridade de números ou obter uma decomposição em fatores primos através de algoritmos mais rápidos. O estudante pode ler mais informações em [93].

No Capítulo 7 responderemos à questão do item 5. O Teorema Fundamental da Aritmética estabelece que a decomposição de um número natural $n \geq 2$ como produto de fatores primos é única.

Quanto à última questão observamos que ela constitui o chamado problema da distribuição dos números primos, e tem grande importância na Teoria dos Números. Entretanto não iremos abordá-la neste livro introdutório. O estudante deverá procurar outros livros de Teoria dos Números para se informar mais.

Finalmente observamos que o aparecimento dos sistemas computacionais algébricos trouxe grande facilidade no estudo dos números. Esses sistemas proporcionam economia de tempo e esforço, e permitem realizar cálculos antes impensáveis. Por isso sugerimos ao estudante aprender a utilizar esses sistemas. A situação ideal é aquela em que o estudante de Teoria dos Números sempre tenha um desses sistemas à mão de modo a facilitar a realização de experimentos numéricos e algébricos que acompanhem o estudo teórico dos conceitos e técnicas.

5.15 Problemas adicionais

Problema 5.15.1. Não se sabe o valor dos dígitos a e b de $(7272ab)_{dez}$, mas se sabe que esse número é múltiplo de 99. Verifique se com essa informação é possível determinar os valores dos dois dígitos desconhecidos.

Problema 5.15.2. Verifique se é possível que num triângulo as medidas em graus dos ângulos internos possam ser todas números primos. Em caso positivo dê todas as possibilidades.

Problema 5.15.3. Um estudante escreveu em cada face de um cubo um número natural positivo. Em seguida escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nas faces que se encontram nesse vértice. Se a soma dos números escritos nos vértices é 105, qual é a soma dos números escritos nas faces?

Problema 5.15.4. Prove que $p > 1$ é primo se e somente se $\text{mdc}(a, p) = 1$ para todo natural a tal que $1 \leq a < p$.

Problema 5.15.5. Mostre que funciona corretamente o seguinte procedimento para verificar se um dado número natural $p > 2$ é ou não primo.

Dado um número natural a, chamaremos de (C) o seguinte comando:

$$(C) \quad \text{calcule } \text{mdc}(a, p) = d$$

Instruções: comece com $a = 2$ e execute (C). Se $d > 1$ pare e guarde o valor de a. Se $d = 1$ tome como a o seu sucessor. Se $a = p$ pare e guarde o valor de a. Se $a < p$ execute novamente (C) e as instruções.

Ao terminar o procedimento, se $a < p$, então p é composto, e se $a = p$ então p é primo.

Problema 5.15.6. Verifique que, se $n \geq 2$ é um número natural, escolhendo-se $n + 1$ números quaisquer dentre 1, 2, 3, ..., $2n$, pelo menos dois dos escolhidos são relativamente primos.

Problema 5.15.7. Seja $p \geq 5$ um número primo. Mostre que 1 é o resto da divisão de p^2 por 24.

Problema 5.15.8. Estude o seguinte método para o cálculo do mdc e do mmc, e entenda por que ele funciona. Exemplificamos com 2100 e 198. Primeiro decompomos em primos os números dados usando a seguinte disposição:

$$\begin{array}{r|l}
2100 & 2 \\
1050 & 2 \\
525 & 3 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
198 & 2 \\
99 & 3 \\
33 & 3 \\
11 & 11 \\
1 & \\
 & \\
 &
\end{array}$$

Em seguida coletamos os divisores primos da seguinte forma. Para o mdc tomamos apenas os divisores primos comuns e com a menor multiplicidade com que aparecem em ambas as decomposições. Dessa forma $\text{mdc}(2100, 198) = 2 \cdot 3 = 6$. Para o mmc tomamos todos os divisores primos, comuns e não comuns, e com a maior multiplicidade. Dessa forma $\text{mmc}(2100, 198) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300$.

Use esse método para calcular $\text{mdc}(84, 90)$ e $\text{mmc}(84, 90)$. Faça o mesmo com 1001 e 4235.

A justificativa desse método está apresentada formalmente no Teorema 7.16. É um dispositivo que costuma ser usado no Ensino Fundamental.

Aplica-se também para o cálculo do mdc e do mmc de três ou mais números. Calcule $\text{mdc}(20, 30, 14)$ e $\text{mmc}(20, 30, 14)$.

Problema 5.15.9. Segue uma variante do método descrito no problema anterior. A decomposição é simultânea. Na última coluna comparece um primo sempre que ele for divisor de pelo menos um dos números. Multiplicando todos os primos assim obtidos temos o mmc dos números. Exemplo:

2100	198	2
1050	99	2
525	99	3
175	33	3
175	11	5
35	11	5
7	11	7
1	11	11
1	1	

Portanto $\text{mmc}(2100, 198) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300$.

Calcule $\text{mmc}(84, 90)$ e $\text{mmc}(1001, 4235)$ usando esse método. Justifique esse método comparando-o com o do Problema 5.15.8. Identifique uma forma para que essa variante também forneça o mdc. Essa variante funciona para três ou mais números? Dê um exemplo.

Problema 5.15.10. A seguinte variante tem a vantagem de ser mais compacta e de fornecer simultaneamente o mdc e o mmc. Na decomposição simultânea só aparecem os primos que são divisores comuns.

2100	198	2
1050	99	3
350	33	

O método permite concluir que $\text{mdc}(2100, 198) = 2 \cdot 3 = 6$ e $\text{mmc}(2100, 198) = 2 \cdot 3 \cdot 350 \cdot 33 = 69300$.

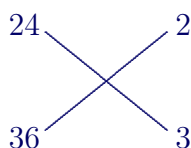
Use esse método para calcular o mdc e o mmc de 84 e 90, e de 1001 e 4235. Justifique esse método comparando-o com o do Problema 5.15.8. Essa variante funciona para três ou mais números? Dê um exemplo.

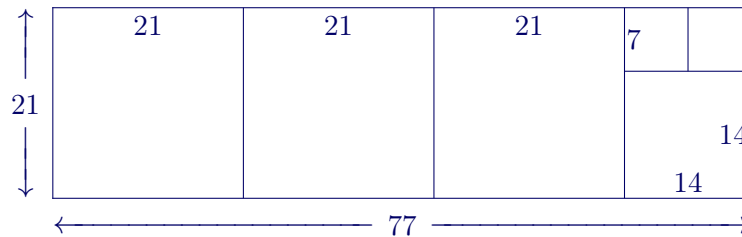
Problema 5.15.11. Estude a seguinte variação do dispositivo do Problema 5.15.10:

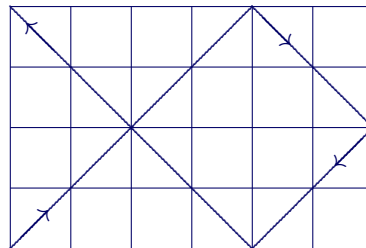
$$\frac{2100}{198} \stackrel{2}{=} \frac{1050}{99} \stackrel{3}{=} \frac{350}{33}$$

$$\Rightarrow \text{mdc}(2100, 198) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ e } \text{mmc}(2100, 198) = 2 \cdot 3 \cdot 350 \cdot 33 = 69300.$$

Problema 5.15.12. Estude o que ocorre em

$$\begin{array}{cccccccc} 24 & = & 2 & 2 & 2 & 3 & \\ 36 & = & 2 & 2 & & 3 & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{mmc}(24, 36) = 24 \times 3 = 72$ ou $\text{mmc}(24, 36) = 36 \times 2 = 72$. Por quê?

Problema 5.15.13. Estude e justifique o seguinte método geométrico de calcular o mdc. Sejam a e b números naturais não nulos. Consideremos o retângulo de lados a e b. Recobrimos a região retangular com quadrados cujos lados são números naturais, os maiores possíveis, conforme ilustra a figura abaixo em que $a = 77$ e $b = 21$. Então $\text{mdc}(a, b)$ é o lado do menor quadrado. Na figura abaixo o menor quadrado tem lados iguais a 7, portanto $\text{mdc}(77, 21) = 7$.

Problema 5.15.14. Estude e justifique o seguinte método geométrico de calcular o mmc. Sejam a e b números naturais não nulos. Consideremos o retângulo de lados a e b. Subdividimos o retângulo em ab quadrados unitários. Um raio de luz sai de um dos vértices do retângulo fazendo um ângulo de 45° com os lados. Sempre que atinge um lado do retângulo $a \times b$, o raio é refletido de volta para o seu interior, até que atinja novamente um de seus vértices, quando sai para o exterior. A quantidade de quadrados unitários atravessados pelo raio de luz é o $\text{mmc}(a, b)$.

A figura abaixo ilustra o caso em que $a = 6$ e $b = 4$. O raio de luz atravessou 12 quadrados unitários, portanto $\text{mmc}(6, 4) = 12$.

Problema 5.15.15. Dona Leonor é quituteira do bairro, e certo dia recebeu três encomendas, de 200, 240 e 300 empadinhas, respectivamente. Feitas as empadinhas, dona Leonor as separou em pacotes iguais. Quantas empadas foram colocadas em cada pacote, sabendo-se que foram feitos o menor número possível de pacotes, e que cada freguês recebeu exatamente a quantia encomendada? Quantos pacotes recebeu cada freguês?

Problema 5.15.16. Pedrinho toma um remédio de 10 em 10 dias e outro de 15 em 15 dias. Sua mãe assinala os dias em um calendário, marcando com um círculo o dia em que é tomado o primeiro remédio, e com um quadradinho o dia em que é tomado o segundo remédio. No dia 17 de janeiro de 2010 os dois dias coincidiram em um domingo. Quando essa coincidência voltou a acontecer novamente pela primeira vez?

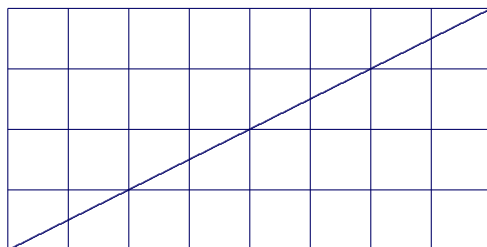
Problema 5.15.17. Um terreno retangular tem 1575 metros de comprimento e 440 de largura. O proprietário deseja cercar o terreno com uma cerca de arame apoiada em mourões. Ele quer que ao longo de todo o perímetro a distância entre dois mourões consecutivos seja constante. Calcule a maior distância possível. Quais são outras soluções para o problema? Qual a melhor solução considerando o contexto?

Problema 5.15.18. Duas rodas de uma engrenagem têm 45 e 60 dentes, respectivamente. Cada roda tem exatamente um dente quebrado. Se, num dado instante, os dentes quebrados

estão em contato, depois de quantas voltas da roda maior eles estarão novamente em contato pela primeira vez? Quantas voltas terá dado a roda menor?

Problema 5.15.19. Um planeta e as órbitas de suas três luas estão contidas em um plano. Os períodos de translação das luas são 60, 84 e 132 unidades de tempo. Se num determinado instante as luas estão alinhadas com o planeta em uma determinada direção, quando isso acontecerá novamente pela primeira vez? Quantas translações terá executado cada uma das luas?

Problema 5.15.20. Numa República o Presidente permanece no cargo por 6 anos, os senadores por 8 e os governadores por 4. Se num determinado ano houve novos mandatos simultâneos para os três cargos, quando isso acontecerá novamente pela primeira vez?

Problema 5.15.21. Sejam m e n números naturais positivos. Considere um retângulo cujos lados medem m e n unidades. Traçando retas paralelas aos lados do retângulo, divida seu interior em mn quadrados unitários. Calcule quantos quadrados unitários têm seu interior interceptados por uma diagonal do retângulo.

Problema 5.15.22. Seja n um número natural. **a)** Mostre que existe um número natural t tal que $n < 3^t$. **b)** Explique por que n pode ser escrito na forma $n = 3^j b$ para algum número natural j e para algum número natural b que não é múltiplo de 3.

Problema 5.15.23. Quais primos podem ser divisores de 3^j para $j > 0$?

Problema 5.15.24. No Problema 5.3.27 foi colocada a hipótese de que os únicos primos divisores de $n = 2^3 3^j$ são 2 e 3. O que se pode fazer para eliminar essa hipótese no enunciado daquele Problema e continuar valendo o mesmo resultado?

5.16 Temas para investigação

Tema 5.16.1. Investigue para quais números naturais m vale a seguinte afirmação: "se m é divisor do produto ab então m é divisor de a ou de b, quaisquer que sejam os números naturais a e b."

Tema 5.16.2. Um estudante conjecturou que a diferença de dois números naturais cúbicos consecutivos quaisquer é primo. Imagine o que teria levado o estudante fazer essa conjectura. Verifique a conjectura. Pesquise o que ocorre com outras potências.

Tema 5.16.3. Um estudante, para verificar se 79 é primo, pensou o seguinte: 79 não é múltiplo de 7 e dividido por 30 resta 19; como $19 > 5$ é primo, então 79 é primo. Faça um detalhamento desse método. Explique tudo.

Tema 5.16.4. Você tem cinco minutos para decompor 8051 em produto de primos usando apenas cálculo mental. Seu método é geral?

Tema 5.16.5. Investigue a primaridade das rep-unidades $1_n = 11\ldots1$, em que a quantidade de 1's é n. Por exemplo, será que 1_n é primo se e somente se n é primo? Quais as condições necessárias e suficientes para que 1_n seja divisor de 1_m? Como são os divisores de 1_m? O que dá $1_m \times 1_n$? O que é $\mathrm{mdc}(1_m, 1_n)$? O que são as rep-unidades na base nove?

Tema 5.16.6. Estude os eventos abaixo. Alguma conjectura? Verifique. Alguma generalização?

$f(n) = n^2 - n + 11 \quad f(-1) = 13,\ f(0) = 11,\ f(1) = 11,\ f(2) = 13,\ f(3) = 17$

$f(n) = n^2 - n + 17 \quad f(-1) = 19,\ f(0) = 17,\ f(1) = 17,\ f(2) = 19,\ f(3) = 23$

Tema 5.16.7. Considere os seguintes eventos:

$\mathcal{D}(2^1 - 1) = \{1\}$
$\mathcal{D}(2^2 - 1) = \{1, 3\}$
$\mathcal{D}(2^3 - 1) = \{1, 7\}$
$\mathcal{D}(2^4 - 1) = \{1, 3, 5, 15\}$
$\mathcal{D}(2^5 - 1) = \{1, 31\}$
$\mathcal{D}(2^6 - 1) = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$
$\mathcal{D}(2^7 - 1) = \{1, 127\}$
$\mathcal{D}(2^8 - 1) = \{1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255\}$
$\mathcal{D}(2^9 - 1) = \{1, 7, 73, 511\}$
$\mathcal{D}(2^{10} - 1) = \{1, 3, 11, 31, 33, 93, 341, 1023\}$
$\mathcal{D}(2^{11} - 1) = \{1, 23, 89, 2047\}$
$\mathcal{D}(2^{12} - 1) = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, 45, 63, 65, 91, 105, 117, 195, 273, 315, 455, 585, 819, 1365, 4095\}$

a) Observe as regularidades. Alguma conjectura? Alguma demonstração?

b) Generalize. Calcule os divisores de $n^j - 1$ para outros valores de n, como $n = 3$, $n = 4$, etc. Quais das regularidades observadas em a) permanecem? Outras conjecturas? Demonstrações?

Tema 5.16.8. Os números da forma $M_p = 2^p - 1$, com p primo, são denominados *números de Mersenne*. No Problema Resolvido 5.24, página 147, foi visto que, para todo número natural $m \geq 2$, se $2^m - 1$ é primo então m é primo. Verifique se vale a recíproca dessa afirmação. Em 1640 Mersenne afirmou que M_p é primo para $p = 13$, 17, 19, 31, 67, 127 e 257. Verifique esta afirmação. Obtenha na literatura outras informações sobre os números de Mersenne.

Tema 5.16.9. Podemos construir testes de primaridade usando condições suficientes. Por exemplo, considere a afirmação:

$$\text{se } p \geq 2 \text{ divide } (p-1)! + 1 \text{ então } p \text{ é primo.}$$

Teoricamente podemos usar essa afirmação para verificar se um dado número natural é primo. Por exemplo, para ver que 5 é primo basta calcular $(5-1)! + 1 = 25$ e constatar que 5 divide 25.

a) Demonstre a afirmação acima.

b) Verifique se ela é um teste de primaridade de aplicação mais fácil que o dado na seção 5.4.

c) Verifique se o teste pode ser melhorado substituindo-se $(p-1)!+1$ por $(p-3)!+1$.

Tema 5.16.10. Considere a sequência dos números capicuas (em ordem crescente)

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \ldots,\ a_9 = 9,\ a_{10} = 11, \ldots$$

e a sequência das diferenças dos termos consecutivos

$$b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2, \ldots$$

Investigue as propriedades da sequência $(b_n)_{n\geq 1}$.

Capítulo 6

O algoritmo da divisão e aplicações

6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos, através da divisão, diversos aspectos das relações entre dois números naturais quaisquer. No presente capítulo vamos formalizar esse estudo com a demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão. Desenvolvemos também uma importante aplicação, o Teorema da Existência e Unicidade da representação dos números naturais em um sistema posicional qualquer.

6.2 O Teorema do Algoritmo da Divisão

Diversas vezes nos referimos ao fato de que, dados números naturais a e b, com $b \neq 0$, podemos dividir a por b, e obter um quociente q e um resto r tal que $r < b$ e $a = bq + r$. O estudante certamente já está convencido da existência de q e r, pois tantas vezes já fez esse tipo de cálculo! De fato, se $b \leq a$, sabemos que podemos reunir as unidades de a em grupos de b unidades, tomando tantos grupos quanto for possível, de modo que restarão $r < b$ unidades. Nesse caso q é a quantidade de grupos de b unidades, e temos $a = bq + r$. Por outro lado, se $a < b$, tomamos $q = 0$ e $r = a$, e temos $a = bq + r$, com $r < b$.

Outra propriedade que admitimos de forma natural é que o quociente e o resto são únicos (com a condição $r < b$). Assim se duas pessoas fazem uma conta de dividir e obtêm resultados diferentes, logo pensamos: "pelo menos uma delas errou a conta".

O teorema abaixo estabelece essas propriedades mais formalmente.

Teorema 6.1. *Dados números naturais a e $b > 0$, existe e é único o par de números naturais q e r tal que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } r < b.$$

Demonstração. Vejamos inicialmente a existência dos números q e r. Conforme já observamos, se $a < b$ tomamos $q = 0$ e $r = a$, e temos $a = bq + r$, com $r < b$. Suponhamos $b \leq a$. Fazemos as subtrações sucessivas $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, etc, enquanto essa diferença for ≥ 0. Quando isso não ocorrer mais, encontramos q tal que $a - qb \geq 0$ e $a < (q + 1)b$. Seja $r = a - qb$. Como $a - qb \geq 0$, vemos que r é um número natural. Ainda, de $a < (q + 1)b$ vem $a - qb < b \Rightarrow r < b$. Isto estabelece a existência de q e r.

Vejamos agora a unicidade. Sejam q e r números naturais tais que $a = bq + r$ e $r < b$, e sejam p e s números naturais tais que $a = bp + s$ e $s < b$. Sem perda de generalidade podemos supor $q \geq p$. Subtraindo membro a membro essas identidades vem $s - r = b(q - p)$. Se fosse

$q > p$, teríamos $q - p \geq 1$ e $s - r = b(q - p) \geq b$. Mas $s \geq r$, portanto $s - r \leq s < b$, o que é uma contradição. Segue que $q = p$. De $s - r = b(q - p)$ obtemos $s - r = 0 \Rightarrow s = r$. Fica demonstrada a unicidade do par q e r. □

Dados números naturais a e $b \neq 0$, denominamos *divisão euclidiana de a por b* a existência dos números naturais q e r tais que $a = bq + r$ e $r < b$. Convencionou-se denominar o Teorema 6.1 acima como *Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana*, ou simplesmente *Teorema do Algoritmo da Divisão*.

Dados números naturais a e $b \neq 0$, podemos dividir a por b e obter números naturais q e r não necessariamente com $r < b$. Neste caso a divisão não é denominada euclidiana. Por exemplo, dividindo $a = 35$ por $b = 8$, podemos ter $35 = 8 \times 3 + 11$, com $q = 3$ e $r = 11$. Neste caso $q = 3$ e $r = 11$ constituem um quociente e um resto da divisão de $a = 35$ por $b = 8$. A divisão euclidiana fornece $35 = 8 \times 4 + 3$, com $q = 4$ e $r = 3$. Vemos assim que a unicidade de q e r depende da condição $r < b$.

Conforme já sabemos um caso especial do Teorema 6.1 ocorre quando $r = 0$, e a é dito ser múltiplo de b, ou b é dito ser divisor ou fator de a.

Problema resolvido 6.2. Encontre todos os números naturais $n \geq 1$ tais que 3 é divisor de $5n - 1$.

Solução. Fazendo algumas tentativas vemos que n pode ser 2, 5, 8, e não pode ser 1, 3, 4, 6, 7. Assim parece dar certo para n da forma $3q + 2$, e não dar certo para n da forma $3q$ ou $3q + 1$. De fato, se $n = 3q + 2$ para algum natural q então $5n - 1 = 15q + 9 = 3(5q + 3)$, e $5n - 1$ é múltiplo de 3. Se $n = 3q$ para algum natural q então $5n - 1 = 15q - 1$, e $5n - 1$ não é múltiplo de 3. Se $n = 3q + 1$ para algum natural q então $5n - 1 = 15q + 4$, e $5n - 1$ não é múltiplo de 3. Portanto os números procurados são os da forma $n = 3q + 2$. □

Problema resolvido 6.3. Demonstre que dado um número natural n existe um múltiplo de n que se escreve com dígitos 1's (e se necessário) seguidos de dígitos zeros.

Solução. Consideremos os n números naturais 1, 11, 111, ..., $11\ldots1$ (este último com n dígitos 1's). Se um deles for múltiplo de n, terminamos. Do contrário, ocorre que a divisão de cada um desses números por n deixa um dos restos 1, 2, 3, ..., $n - 1$. Como são $n - 1$ possibilidades para os restos e são n números, necessariamente existem dois dos números 1, 11, 111, ... que divididos por n deixam restos iguais. A diferença do maior para o menor é da forma requerida, e de acordo com o Problema 6.3.1 abaixo essa diferença é um múltiplo de n. □

Problema resolvido 6.4. Sejam $n \geq 1$ e $a \geq 1$ números naturais, e seja q o quociente da divisão euclidiana de n por a. Mostre que q é a quantidade de múltiplos de a no conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Solução. Se $n < a$ temos $q = 0$ e nenhum elemento de S é múltiplo de a. Portanto o resultado vale neste caso. Suponhamos $a \leq n$. Seja s a quantidade de elementos de S que são múltiplos de a. Esses números são exatamente:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ sa$$

Como sa pertence a S e $(s + 1)a$ não, temos $sa \leq n < (s + 1)a$. Mas, conforme se viu no Teorema 6.1, q é o único número natural tal que $qa \leq n < (q + 1)a$. Desta forma $q = s$. □

Para todo número real $x \geq 0$, indicaremos por $\lfloor x \rfloor$ o maior dentre os números naturais $\leq x$. Por exemplo,

$$\lfloor 1,2 \rfloor = 1, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor 5/6 \rfloor = 0$$

Problema resolvido 6.5. Sejam n e $a \geq 1$ números naturais, e seja q o quociente da divisão euclidiana de n por a. Mostre que $q = \lfloor n/a \rfloor$. Portanto $\lfloor n/a \rfloor$ é a quantidade de múltiplos de a no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Solução. Seja $n = aq + r$, com $0 \leq r < a$. Então

$$\frac{n}{a} = q + \frac{r}{a} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{a} \right\rfloor = q$$

pois q é número natural e $0 \leq r/a < 1$. □

Problema resolvido 6.6. Seja n um número natural. Calcule a quantidade de elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que são múltiplos de 2 ou de 3.

Solução. Um estudante mais apressado poderia dizer que é $\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor$, mas nessa soma estaria contando duas vezes os múltiplos de $2 \cdot 3 = 6$. Portanto o número procurado é

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$$

□

6.3 Problemas

Problema 6.3.1. Mostre que se os números naturais $a \geq b$ têm um mesmo resto quando divididos por c, então a diferença $a - b$ é um múltiplo de c.

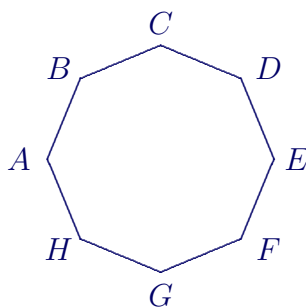
Problema 6.3.2. Demonstre que, para todo número natural a, o dígito das unidades da representação decimal de a é exatamente o resto da divisão de a por 10.

Problema 6.3.3. Observando o dígito da unidade da representação decimal de um número natural, em que situações é possível garantir que o número não é um quadrado perfeito?

Problema 6.3.4. Demonstre que a soma dos quadrados de dois números ímpares não é um quadrado perfeito.

Problema 6.3.5. Encontre a 2010ª letra da sequência periódica

XWDTURYXWDTURYXWDTURYXWDTURYXWDT ...

Problema 6.3.6. Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são vértices consecutivos de um octógono regular. A partir de A, no sentido horário de rotação, associamos a esses pontos ordenadamente os números naturais 1, 2, 3, ..., de modo que $A \to 1$, $B \to 2$, $C \to 3$, $D \to 4$, $E \to 5$, $F \to 6$, $G \to 7$, $H \to 8$, $A \to 9$, $B \to 10$, e assim por diante. Calcule a que letra está associado o número 2008.

Problema 6.3.7. Prove detalhadamente que $(a_n \dots a_1 a_0)_{dez}$ é múltiplo de 11 se e somente se $(a_n \dots a_1)_{dez} - a_0$ também o for. Use esse resultado para verificar que 7 153 474 108 é múltiplo de 11.

Problema 6.3.8. a) Verifique se existem primos p tais que $p+4$, $p+6$ e $p+8$ também são primos. **b)** Faça o mesmo com p, $p+2$, $p+4$ e $p+6$.

Problema 6.3.9. a) Encontre todos os números naturais n para os quais 5 é divisor de $3n+1$. **b)** Encontre todos os números naturais n para os quais 6 é divisor de $3n+1$.

6.4 Existência e unicidade em sistemas posicionais

No Capítulo 2, seção 2.6, vimos o que são sistemas posicionais de base β para um número natural $\beta \geq 2$ qualquer, e que todo número natural tem representação nesse sistema. O teorema abaixo formaliza essa afirmação e estabelece a unicidade da representação.

Teorema 6.7. *Seja $\beta \geq 2$ um número natural. Todo número natural n pode ser escrito de maneira única na forma*

$$n = d_t\beta^t + d_{t-1}\beta^{t-1} + \cdots + d_1\beta + d_0 \tag{6.1}$$

em que t e d_i são números naturais tais que $d_t \neq 0$ se $n \geq 1$ e $0 \leq d_i < \beta$ para $i = 0, 1, 2, \dots, t$.

A representação 6.1, conforme já sabemos, denomina-se *representação de n na base β*. Na representação 6.1 os números d_j são chamados *dígitos* de n na base β. A unicidade da representação significa que se

$$d_t\beta^t + d_{t-1}\beta^{t-1} + \cdots + d_1\beta + d_0 = f_s\beta^s + f_{s-1}\beta^{s-1} + \cdots + f_1\beta + f_0$$

então $t = s$ e $d_i = f_i$ para todo i.

A representação 6.1 pode ser escrita na forma compacta

$$(d_t d_{t-1} \dots d_1 d_0)_\beta \tag{6.2}$$

e se estiver claro de que base se trata escrevemos apenas $d_t d_{t-1} \dots d_1 d_0$.

Demonstração do Teorema 6.7

Se $n = 0$ a representação 6.1 se resume a $t = 0$ e $d_0 = 0$. Suponhamos $n \geq 1$. As potências de β

$$\beta^0,\ \beta^1,\ \beta^2,\ \beta^3, \dots, \beta^i, \dots$$

formam uma sequência estritamente crescente de números naturais. Então n coincide com uma dessas potências ou está entre duas consecutivas. Seja t o (único) número natural tal que

$$\beta^t \leq n < \beta^{t+1}$$

Dividindo n por β^t encontramos um quociente d_t e um resto r_t tais que

$$n = d_t\beta^t + r_t \quad \text{e} \quad r_t < \beta^t$$

Como $\beta^t \leq n$ e $r_t < \beta^t$ vem que $d_t \neq 0$.

Em seguida dividimos r_t por β^{t-1} obtendo um quociente d_{t-1} e um resto r_{t-1} tais que

$$r_t = d_{t-1}\beta^{t-1} + r_{t-1} \quad \text{e} \quad r_{t-1} < \beta^{t-1}$$

Eventualmente pode ocorrer que d_{t-1} seja zero.

Executando esse procedimento num total de $t+1$ vezes, encontramos quocientes d_i e restos r_i tais que

$$n = d_t\beta^t + r_t \quad \text{e} \quad r_t < \beta^t$$

e

$$r_i = d_{i-1}\beta^{i-1} + r_{i-1} \quad \text{e} \quad r_{i-1} < \beta^{i-1}$$

para todo i tal que $1 \leq i < t$.

Para $i = 2$ temos $r_2 = d_1\beta^i + r_1$ com $r_1 < \beta$. Para $i = 1$ temos $r_1 = d_0\beta^0 + r_0$ com $r_0 < \beta^0 = 1$, o que implica $r_0 = 0$ e $r_1 = d_0$.

Coletando as identidades acima obtemos

$$\begin{aligned} n &= d_t\beta^t + r_t \\ &= d_t\beta^t + d_{t-1}\beta^{t-1} + r_{t-1} \\ &\vdots \\ &= d_t\beta^t + d_{t-1}\beta^{t-1} + \cdots + d_1\beta + r_1 \\ &= d_t\beta^t + d_{t-1}\beta^{t-1} + \cdots + d_1\beta + d_0 \end{aligned}$$

Notemos que $d_i < \beta$ para todo $0 \leq i \leq t$. De fato, isto é verdade para $i = t$, pois $n < \beta^{t+1} \Rightarrow d_t\beta^t + r_t < \beta^{t+1} \Rightarrow d_t\beta^t < \beta^{t+1} \Rightarrow d_t < \beta$. Isto também é verdade para $i = 0$, pois já vimos que $d_0 = r_1 < \beta$. Seja i tal que $1 \leq i < t$. Temos $r_{i+1} = d_i\beta^i + r_i$ e $r_{i+1} < \beta^{i+1}$. Portanto $d_i\beta^i + r_i < \beta^{i+1} \Rightarrow d_i\beta^i < \beta^{i+1} \Rightarrow d_i < \beta$.

Fica demonstrada a existência da representanção de n na base β. Passamos agora a demonstrar a unicidade da representação.

Resguardando a representação 6.1, seja $n = f_s\beta^s + f_{s-1}\beta^{s-1} + \cdots + f_1\beta + f_0$ uma representação qualquer, nas condições do enunciado do Teorema.

Como $f_s \neq 0$ segue que $\beta^s \leq n$. Como $f_i \leq \beta - 1$ para todo i segue que $n \leq (\beta-1)\beta^s + (\beta-1)\beta^{s-1} + \cdots + (\beta-1) = (\beta-1)[\beta^s + \beta^{s-1} + \cdots + 1] = (\beta-1)(\beta^{s+1}-1)/(\beta-1) = \beta^{s+1} - 1 < \beta^{s+1}$. Portanto $\beta^s \leq n < \beta^{s+1}$. Como é único o número t tal que $\beta^t \leq n < \beta^{t+1}$ segue que $t = s$.

Observamos de $n = (d_t\beta^{t-1} + d_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + d_1)\beta + d_0$ que $d_t\beta^{t-1} + d_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + d_1$ e $d_0 < \beta$ são respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de n por β.

Observamos ainda de $n = (f_t\beta^{t-1} + f_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + f_1)\beta + f_0$ que $f_t\beta^{t-1} + f_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + f_1$ e $f_0 < \beta$ são também respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de n por β.

Em virtude da unicidade do quociente e do resto da divisão euclidiana temos

$$d_t\beta^{t-1} + d_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + d_1 = f_t\beta^{t-1} + f_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + f_1 \quad \text{e} \quad d_0 = f_0$$

Aplicando o mesmo argumento a $d_t\beta^{t-1} + d_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + d_1 = f_t\beta^{t-1} + f_{t-1}\beta^{t-2} + \cdots + f_1$ vemos que $d_t\beta^{t-2} + d_{t-1}\beta^{t-3} + \cdots + d_2 = f_t\beta^{t-2} + f_{t-1}\beta^{t-3} + \cdots + f_2$ e $d_1 = f_1$.

Repetindo o argumento até esgotar concluímos que $d_i = f_i$ para todo i, terminando a demonstração da unicidade. $\square$

Se o estudante estudar acuradamente a demonstração do Teorema 6.7 deverá perceber que qualquer sequência crescente de números naturais determina um sistema de numeração posicional. Confira o Problema 6.6.14.

6.5 Problemas

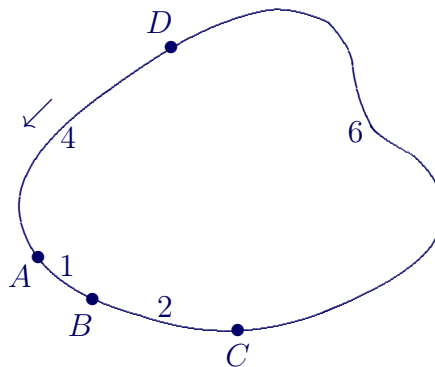
Problema 6.5.1. Construa um argumento para verificar que dados números naturais quaisquer $n \geq 1$ e $\beta \geq 2$, existe um único número natural t tal que $\beta^t \leq n < \beta^{t+1}$.

Problema 6.5.2. Demonstre que todo sistema de numeração aditivo de base β satisfaz às propriedades fundamentais de existência e unicidade.

Problema 6.5.3. Demonstre que todo número natural $n > 0$ se escreve como uma soma de diferentes potências de 2. Prove que essa representação é única.

6.6 Problemas adicionais

Problema 6.6.1. Os campeonatos mundiais de futebol são realizados de quatro em quatro anos a partir de 1930 (não houve certames em 1942 e em 1946). Supondo que essa prática continue regularmente, pergunta-se se haverá campeonato mundial de futebol no ano de 4472. Justifique.

Problema 6.6.2. A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura, e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A. Mostre que é possível realizar corridas com extensão em quilômetros igual a qualquer número natural.

Problema 6.6.3. Os números naturais de 1 a 1000 são escritos em ordem em volta de uma circunferência. Começando com 1 e dando voltas na circunferência, marque os números 1, 15, 29, 43, ..., contando de quatorze em quatorze, só parando no momento em que for atingido um número já marcado. Determine quais foram os números não marcados.

Problema 6.6.4. Verifique que se 3 divide $a^2 + b^2$ então 3 divide a e b, quaisquer que sejam os números naturais a e b.

Problema 6.6.5. Observe que se n e a são números naturais positivos com a ímpar, então $(a^n - 1)/2$ é um número natural. Investigue a paridade deste número. Isto é, determine em que condições sobre a e n o número $(a^n - 1)/2$ é par (e, complementarmente, é ímpar).

Problema 6.6.6. Determine todos os números naturais a para os quais 10 divide $a^{10} + 1$.

Problema 6.6.7. Aproveitando que definimos no texto a notação $\lfloor x \rfloor$, verifique as duas propriedades seguintes. **a)** Quaisquer que sejam os números reais $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$. **b)** Para todo número real $x \geq 0$ e para todo número natural $n \geq 1$ vale que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

Problema 6.6.8. Vamos dar continuidade ao Problema 5.5.7 da página 134. Dado um algoritmo de primaridade $\mathcal{A}$ e dado um número natural n, indicamos por $\mathcal{A}(n)$ a quantidade máxima de divisões necessárias para, usando o algoritmo $\mathcal{A}$, determinar se n é primo ou não. **b)** Dado um número natural ímpar $n \geq 11$, sabe-se que ele não é múltiplo de 3 e nem de 5. Calcule $\mathcal{B}(n)$ para o seguinte algoritmo de primaridade $\mathcal{B}$: dividir n pelos ímpares 7, ..., $n-2$ que não são múltiplos de 3 e nem de 5; se nenhuma das divisões for exata, então n é primo. **c)** Dado um número natural ímpar $n \geq 11$, sabe-se que ele não é múltiplo de 3 e nem de 5. Calcule $\mathcal{C}(n)$ para o seguinte algoritmo de primaridade $\mathcal{C}$: dividir n pelos ímpares de 7 a $\sqrt{n}$ que não são múltiplos de 3 e nem de 5; se nenhuma das divisões for exata, então n é primo. **d)** Para todo número natural ímpar $n \geq 3$ calcule $\mathcal{E}(n)$ para o seguinte algoritmo de primaridade $\mathcal{E}$: dividir n pelos ímpares 3, 5, 7, ..., n, nessa ordem, parando as divisões quando encontrar um quociente menor do que o divisor; se não houve divisão anterior exata então n é primo.

Problema 6.6.9. Para todo número natural $a \geq 10$ indicaremos por $s(a)$ a soma dos dígitos decimais de a. Se $a = 9$ poremos $s(9) = 0$. Por exemplo, $s(173) = 1+7+3 = 11$. **a)** Prove que para todo $a \geq 9$ o número $s(a)$ é um resto da divisão de a por 9, mas não necessariamente é o resto da divisão euclidiana de a por 9. **b)** Ponhamos $s^1(a) = s(a)$ e $s^m(a) = s(s^{m-1}(a))$ para todo número natural $m \geq 2$. Demonstre que para todo a existe m tal que $s^m(a) = 9$ ou $s^m(a)$ é o resto da divisão euclidiana de a por 9.

Problema 6.6.10. Para todo número natural a indicaremos por $r(a)$ o resto da divisão euclidiana de a por 9. **a)** (*prova do nove para a adição*) Demonstre que $r(r(a)+r(b)) = r(a+b)$, quaisquer que sejam os números naturais a e b. **b)** (*prova do nove para a multiplicação*) Demonstre que $r(r(a)r(b)) = r(ab)$, quaisquer que sejam os números naturais a e b.

Problema 6.6.11. A numeração das horas do dia pode ser definida por um sistema posicional da forma $(a;b;c)_{horas}$, em que $0 \leq a < 24$, $0 \leq b < 60$ e $0 \leq c < 60$ são números naturais, e $(a;b;c)_{horas} = a$ horas b minutos e c segundos. Portanto 1 minuto equivale a 60 segundos, uma hora a 60 minutos e 1 dia a 24 horas. **a)** Um dia tem 86400 segundos. Demonstre que todo número natural $0 \leq n < 86400$ tem uma única representação no sistema acima. **b)** Usando a aritmética desse sistema faça os cálculos: 17h32m12s+2h47m51s; 23h19m8s−5h38m42s; 3×7h17m37s; 6h37m43s÷4.

Problema 6.6.12. Em Geometria e em Astronomia se mede o ângulo central de uma circunferência em graus, minutos de arco e segundos de arco. Um grau vale 60 minutos de arco, e este vale 60 segundos de arco. Uma volta inteira na circunferência vale 360 graus. Anotaremos como de costume x graus por x°, y minutos de arco por y' e z segundos de arco por z''. Se um ponto deu u voltas inteiras em uma circunferência, isso será indicado por u^v **a)** O sistema $u^v x^\circ y' z''$ é posicional? **b)** Efetue nesse sistema $3^v 119^\circ 38' 52'' + 2^v 217^\circ 47' 29''$.

Problema 6.6.13. a) Demonstre que todo número natural $a \geq 2$ pode ser escrito na forma

$$a = 3^n + a_{n-1}3^{n-1} + \ldots + a_2 3^2 + a_1 3 + a_0$$

em que $n \geq 1$ e $a_i = -1$, 0 ou 1 para todo $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Esta expansão chama-se *expansão ternária balanceada.* **b)** Demonstre que a expansão ternária balanceada de qualquer número natural $a \geq 2$ é única. **c)** Seja $n \geq 1$ um número natural. Prove que a expansão ternária balanceada de todo número natural a tal que $2 \leq a \leq (3^{n+1}-1)/2$ é da forma $a = 3^m + a_{m-1}3^{m-1} + \ldots + a_2 3^2 + a_1 3 + a_0$, com $a_i = -1$, 0 ou 1 para todo $i = 0, 1, 2, ..., m-1$ e com $m \leq n$.

Problema 6.6.14. Sejam $1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots < \beta_n < \ldots$ números naturais. Qualquer número natural n se escreve na forma

$$n = d_t\beta_t + d_{t-1}\beta_{t-1} + \cdots + d_1\beta_1 + d_0 \tag{6.3}$$

em que t e d_i são números naturais tais que $d_t \neq 0$ se $n \geq 1$ e $0 \leq d_i < \beta_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, t$. Além disso, se $d_i\beta_i + d_{i-1}\beta_{i-1} + \ldots + d_0\beta_0 < \beta_{i+1}$ para todo $i \geq 0$, então a representação 6.3 é única.

6.7 Temas para investigação

Tema 6.7.1. Dado um número natural $a \geq 1$, investigue como é a unidade da representação decimal de a^n para todo número natural $n \geq 1$. Faça conjecturas. Alguma demonstração?

Tema 6.7.2. Um estudante, examinando alguns primos $p > 5$, fez a seguinte conjectura: "$p > 5$ é primo se e somente se é de uma das formas $p = 6k+1$ ou $p = 6k+5$, sendo k qualquer número natural." Demonstre a conjectura ou, se estiver errada, faça um ajuste para torná-la verdadeira.

Tema 6.7.3. Considere os seguintes eventos:

$$\begin{array}{ll}
2^1+1=3 & 2^{10}+1=5^2\cdot 41\\
2^2+1=5 & 2^{11}+1=3\cdot 683\\
2^3+1=3^2 & 2^{12}+1=17\cdot 241\\
2^4+1=17 & 2^{13}+1=3\cdot 2731\\
2^5+1=3\cdot 11 & 2^{14}+1=5\cdot 29\cdot 113\\
2^6+1=5\cdot 13 & 2^{15}+1=3^2\cdot 11\cdot 331\\
2^7+1=3\cdot 43 & 2^{16}+1=65537\\
2^8+1=257 & 2^{17}+1=3\cdot 43691\\
2^9+1=3^3\cdot 19 & 2^{18}+1=5\cdot 13\cdot 37\cdot 109
\end{array}$$

a) Observe as regularidades. Alguma conjectura? Alguma demonstração?

b) Generalize. Calcule os divisores de n^j+1 para outros valores de n, como $n = 3$, $n = 4$, etc. Quais das regularidades observadas em a) permanecem? Outras conjecturas? Demonstrações?

Capítulo 7

O Teorema Fundamental da Aritmética

7.1 Introdução

O Teorema Fundamental da Aritmética estabelece a existência e unicidade da decomposição de todo número natural $n \geq 2$ como produto de primos. Esse é um resultado importante da Teoria dos Números. Neste capítulo veremos a demonstração deste teorema assim como algumas aplicações.

7.2 Propriedades adicionais do máximo divisor comum

Uma das formas de demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética consiste em utilizar certas propriedades do mdc. Vimos na Seção 5.10, página 140, a definição do mdc de dois ou mais números naturais e estudamos várias propriedades. Vamos ampliar esse estudo com alguns resultados adicionais. A apresentação que segue nesta seção é um detalhamento de [108], páginas 2 a 8.

Vimos no Escólio 5.16, página 141, que "se a, b, q e r são números naturais tais que $a = bq+r$, então os divisores comuns de a e b são também os divisores comuns de b e r". Aplicamos esse resultado para construir o algoritmo euclidiano para o cálculo do mdc de números naturais. Mas essa construção nos fornece outras propriedades.

Sejam a e $b \neq 0$ números naturais. Dividindo a por b encontramos números naturais q_1 e r_1 tais que $a = bq_1 + r_1$ e $0 \leq r_1 < b$. Se $0 < r_1$, dividimos b por r_1 e encontramos números naturais q_2 e r_2 tais que $b = r_1q_2 + r_2$ e $0 \leq r_2 < r_1$. E assim sucessivamente, no i-ésimo passo dividimos r_{i-2} por r_{i-1} e encontramos números naturais q_i e r_i tais que $r_{i-2} = r_{i-1}q_i + r_i$ e $0 \leq r_i < r_{i-1}$. Obtemos assim uma sequência de restos $0 < \ldots < r_i < \ldots < r_3 < r_2$ enquanto r_i não for nulo. Mas entre b e 0 existe uma quantidade finita de números naturais. Assim esse procedimento necessariamente nos fornece um resto $r_{n+1} = 0$, de modo que r_n é divisor de r_{n-1}. Em resumo temos as relações:

$$\begin{array}{rcll} a & = & bq_1 + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\ b & = & r_1q_2 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 & = & r_2q_3 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \vdots & & & \\ r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} & = & r_nq_{n+1} + r_{n+1} & 0 = r_{n+1} \end{array} \qquad (7.1)$$

Conforme já sabemos, uma consequência dessas identidades e do Teorema 5.15 é que $\text{mdc}(a, b) = r_n$. Agora, como resultado do Escólio 5.16, temos o

Teorema 7.1. *Se a e b são números naturais, então o conjunto dos divisores comuns de a e b é também o conjunto dos divisores de* $\text{mdc}(a, b)$.

Demonstração. Se $b = 0$ o conjunto dos divisores comuns de a e b é $\mathcal{D}(a)$. Como $\text{mdc}(a, 0) = a$, vale a afirmação do Teorema. Suponhamos $b \neq 0$. As identidades 7.1 e o Escólio 5.16 nos dizem que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r_1) = \mathcal{D}(r_1) \cap \mathcal{D}(r_2) = \ldots = \mathcal{D}(r_{n-1}) \cap \mathcal{D}(r_n)$. Como r_n é divisor de r_{n-1} temos $\mathcal{D}(r_{n-1}) \cap \mathcal{D}(r_n) = \mathcal{D}(r_n)$. Portanto $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(r_n)$. Lembrando que $\text{mdc}(a, b) = r_n$, terminamos a demonstração. □

Vejamos agora o

Teorema 7.2. *Para todo número natural t vale*

$$\text{mdc}(ta, tb) = t\,\text{mdc}(a, b) \tag{7.2}$$

quaisquer que sejam os números naturais a e b.

Demonstração. Se $t = 0$ temos $\text{mdc}(ta, tb) = \text{mdc}(0, 0) = 0$ e $t\,\text{mdc}(a, b) = 0\,\text{mdc}(a, b) = 0$, e vale a afirmação. Suponhamos $t > 0$. Se $b = 0$, temos $\text{mdc}(ta, 0) = ta$ e $t\,\text{mdc}(a, 0) = ta$, e vale a afirmação. Suponhamos que $b \neq 0$. Consideremos as identidades 7.1. Elas nos dizem que $\text{mdc}(a, b) = r_n$. Ainda, multiplicando as identidades e desigualdades 7.1 por t vem

$$\begin{array}{rcll} ta & = & tbq_1 + tr_1 & 0 \leq tr_1 < tb \\ tb & = & tr_1q_2 + tr_2 & 0 \leq tr_2 < tr_1 \\ tr_1 & = & tr_2q_3 + tr_3 & 0 \leq tr_3 < tr_2 \\ \vdots & & & \\ tr_{n-2} & = & tr_{n-1}q_n + tr_n & 0 \leq tr_n < tr_{n-1} \\ tr_{n-1} & = & tr_nq_{n+1} + tr_{n+1} & 0 = tr_{n+1} \end{array} \tag{7.3}$$

o que nos diz que $\text{mdc}(ta, tb) = tr_n$. Portanto $\text{mdc}(ta, tb) = t\,\text{mdc}(a, b)$. Isto termina a demonstração do Teorema. □

Segue um resultado importante, um dos principais objetivos desta seção:

Teorema 7.3. *Se* $\text{mdc}(a, b) = 1$ *e se b é divisor de ac então b é divisor de c, quaisquer que sejam os números naturais a, $b > 0$ e c.*

Demonstração. Aplicando o Teorema 7.2 temos $\text{mdc}(ac, bc) = c\,\text{mdc}(a, b) = c$. Por outro lado, como b é divisor de ac e de bc, em virtude do Teorema 7.1 b é divisor de $\text{mdc}(ac, bc)$. Segue que b é divisor de c. □

Corolário 7.4. *Se p é primo e se p é divisor de ab então p é divisor de a ou de b, quaisquer que sejam os números naturais a e b.*

Demonstração. Se p é divisor de a nada há a demonstrar. Suponhamos que p não é divisor de a. Então $\text{mdc}(p, a) = 1$, e o Teorema acima garante que p é divisor de b. □

Este importante Corolário tem diversas demonstrações, por exemplo confira o Problema 7.10.12. Confira também [45], páginas 58 a 62.

Corolário 7.5. *Se p, q e t são primos e se p é divisor de qt então $p = q$ ou $p = t$.*

Demonstração. Devido ao Corolário anterior, p é divisor de q ou de t. Então $p = q$ ou $p = t$. □

O resultado abaixo é uma generalização do Corolário 7.4.

Corolário 7.6. *Se p, a_1, a_2, ..., a_s são números naturais com p primo e se p é divisor do produto $a_1 a_2 \cdots a_s$ então existe i, com $1 \leq i \leq s$, tal que p é divisor de a_i.*

Demonstração. O resultado é verdadeiro para $s = 2$ de acordo com o Corolário 7.4.

Supondo que o resultado seja falso, seja $s > 2$ o menor número natural para o qual isso ocorre. Então existem um primo p e números naturais a_1, a_2, ..., a_s tais que p é divisor do produto $a_1 a_2 \cdots a_s$ e p não é divisor de a_i para todo i tal que $1 \leq i \leq s$. Separando o produto $a_1 a_2 \cdots a_s$ na forma $(a_1 a_2 \cdots a_{s-1})(a_s)$, como p não é divisor de a_s, o Corolário 7.4 garante que p é divisor de $a_1 a_2 \cdots a_{s-1}$. Por hipótese temos ainda que p não divide a_i para todo i tal que $1 \leq i \leq s-1$. Encontramos assim um número $< s$ para o qual o Corolário não é verdadeiro, contrariando a minimalidade de s. Concluímos que a afirmação do Corolário é verdadeira. □

O seguinte resultado é bastante útil.

Teorema 7.7. *Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais relativamente primos. Se a e b são divisores do número natural c então ab também o é.*

Demonstração. Temos $\text{mdc}(ac, bc) = c\,\text{mdc}(a, b) = c$. Como ab é divisor de ac e de bc vem que ab é divisor de $\text{mdc}(ac, bc)$, e portanto de c. □

Problema resolvido 7.8. Se $\text{mdc}(a, b) = 1$ então $\text{mdc}(ac, b) = \text{mdc}(c, b)$ quaisquer que sejam os números naturais a, b e c.

Solução. Se $c = 0$ temos $\text{mdc}(ac, b) = b$ e $\text{mdc}(c, b) = b$, e vale a afirmação. Suponhamos $c > 0$. Se $a = 0$ temos $b = 1$ em virtude da condição $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então $\text{mdc}(ac, b) = b = 1$ e $\text{mdc}(c, b) = \text{mdc}(c, 1) = 1$, e vale a afirmação. Se $b = 0$ temos $a = 1$ em virtude da condição $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então $\text{mdc}(ac, b) = \text{mdc}(c, b)$, e novamente vale a afirmação. Suponhamos $a > 0$ e $b > 0$. Seja $d = \text{mdc}(ac, b)$. Temos $d \geq 1$ e d é divisor comum de ac e de b, o que implica ser d divisor comum de ac e de bc. Então d é divisor de $\text{mdc}(ac, bc)$, em virtude do Teorema 7.1. Mas $\text{mdc}(ac, bc) = c\,\text{mdc}(a, b)$, conforme vimos no Teorema 7.2. Usando a hipótese $\text{mdc}(a, b) = 1$ segue que d é divisor de c. Portanto d é divisor comum de c e b, e assim d é divisor de $\text{mdc}(c, b)$.

Por outro lado, seja $f = \text{mdc}(c, b)$. Então $f \geq 1$ e f é divisor de c e de $b \Rightarrow f$ é divisor de ac e de $b \Rightarrow f$ é divisor de $\text{mdc}(ac, b)$.

Provamos que d é divisor de f e vice-versa. Como $d \geq 1$ e$f \geq 1$ obtemos $d \leq f$ e $f \leq d$, portanto $d = f$. Isto termina a demonstração. □

7.3 Problemas

Problema 7.3.1. Demonstre a afirmação recíproca do Corolário 7.4. Suponha que o número natural $p > 1$ satisfaça à seguinte condição: quaisquer que sejam os números naturais a e b, se p divide ab então p divide a ou p divide b. Prove que com esta condição p é primo.

Problema 7.3.2. Demonstre novamente o critério de divisibilidade por 6 dado no Problema 4.10.21 na página 113, mas agora utilizando os resultados desta seção.

Problema 7.3.3. Demonstre uma versão mais geral do Teorema 7.2: para todo número natural t e quaisquer que sejam os números naturais a_1, a_2, ..., a_n, tem-se $\text{mdc}(ta_1, \ldots, ta_n) = t\,\text{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$.

Problema 7.3.4. Se p, p_1, p_2, ..., p_s são primos e se p é divisor do produto $p_1p_2 \ldots p_s$ então $p = p_i$ para algum i.

Problema 7.3.5. Se p é primo e se p é divisor de a^n, então p é divisor de a, quaisquer que sejam os números naturais a e $n \geq 1$.

Problema 7.3.6. Se p é primo e se p é divisor de a^n, então p^n é divisor de a^n, quaisquer que sejam os números naturais a e $n \geq 1$.

Problema 7.3.7. Exiba divisores de 91! que são > 91. Exiba o maior divisor de 91! que não seja ele mesmo. Encontre todos os números primos divisores de 91! Justifique.

Problema 7.3.8. Se p e q são primos e se p é divisor de q^n então $p = q$.

Problema 7.3.9. Prove que se $n = p^2$ com p primo, então $\mathcal{D}(n) = \{1, p, n\}$.

Problema 7.3.10. Demonstre que se $n = pq$ com p e q primos, então $\mathcal{D}(n) = \{1, p, q, n\}$.

Problema 7.3.11. Se a, b, c e n são números naturais tais que a e c são relativamente primos e a é divisor de bc^n, então a é divisor de b.

Problema 7.3.12. Sejam a e b números naturais não simultaneamente nulos. Seja $\text{mdc}(a, b) = d$ e sejam a_1 e b_1 tais que $a = da_1$ e $b = db_1$. Mostre que $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$.

Problema 7.3.13. Prove que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ são números naturais relativamente primos e se c é um divisor de ab, então existem números naturais relativamente primos c_1 e c_2 tais que $c = c_1c_2$, c_1 é divisor de a e c_2 é divisor de b.

Problema 7.3.14. Demonstre que se p é primo então p não divide $n!$ para todo número natural n tal que $n < p$.

Problema 7.3.15. Investigue para quais números naturais $n \geq 1$ é verdade que n é divisor de $(n-1)!$ Alguma justificativa?

Problema 7.3.16. Se p é primo então p divide $\binom{p}{i}$ para todo número natural i tal que $0 < i < p$.

7.4 O Teorema Fundamental da Aritmética

Teorema 7.9. *Todo número natural ≥ 2 é primo ou pode ser decomposto como um produto de números primos, e essa decomposição é única a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Vimos no Teorema 4.22, página 109, que todo número natural ≥ 2 é primo ou se escreve como produto de primos. Vejamos agora a unicidade. Seja $n \geq 2$ um número natural, e sejam

$$n = p_1p_2p_3 \ldots p_s = q_1q_2q_3 \ldots q_t$$

decomposições de n como produto de primos. Queremos provar que $s = t$ e que, rearranjando os índices se necessário, se tem $p_i = q_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq s$.

Essa afirmação é claramente verdadeira se $s = 1$ (ou $t = 1$), pois nesse caso n é primo. No que segue consideramos $s \geq 2$ e $t \geq 2$. Suponhamos que a unicidade não seja verdadeira, e seja n o menor número natural para o qual isso ocorre. Sejam

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s = q_1 q_2 q_3 \ldots q_t$$

decomposições quaisquer de n como produto de primos. Observemos que o primo p_s é um divisor do produto $q_1 q_2 q_3 \ldots q_t$, e, em virtude do Corolário 7.6, existe i tal que $p_s = q_i$. Renomeando os índices dos primos q_j, podemos supor que $i = t$. Dessa forma $p_s = q_t$, e $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{s-1} = q_1 q_2 q_3 \ldots q_{t-1}$. Temos $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{s-1} < n$ e em virtude da minimalidade de n a unicidade é verdadeira para $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{s-1}$. Portanto $s - 1 = t - 1$ e, renomeando os índices dos primos q_j, se necessário, temos que $p_i = q_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq s - 1$. Disto obtemos que duas decomposições quaisquer de n são iguais, a menos da ordem dos fatores, o que é uma contradição. Em consequência a unicidade da decomposição é válida para todo número natural $n \geq 2$. □

Na decomposição de um número natural qualquer $n \geq 2$ como produto de primos podemos reunir em potências os primos iguais e escrever

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k} \tag{7.4}$$

em que $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ são primos e e_i é um número natural positivo para todo i tal que $1 \leq i \leq k$.

A forma 7.4 denomina-se *decomposição canônica* de n. A unicidade da decomposição significa nesse contexto que se

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_s^{e_s} = q_1^{f_1} q_2^{f_2} q_3^{f_3} \ldots q_t^{f_t}$$

são decomposições canônicas de n então $s = t$, $p_i = q_i$ e $e_i = f_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq s$.

Problema resolvido 7.10. Sejam a e b números naturais. Demonstre que se $2^a + 1 = b^2$ então $a = b = 3$.

Solução. Notemos que $b > 1$ e que $2^a = b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$. Como 2^a é par então necessariamente b é ímpar. Existe um número natural $k \geq 1$ tal que $b = 2k + 1$. Temos $2^a = (b + 1)(b - 1) = 4k(k + 1)$. Em virtude do Teorema Fundamental da Aritmética, 2 é o único primo da decomposição de $4k(k + 1)$ em primos.

Afirmamos que $k = 1$. Suponhamos $k > 1$. Sendo k e $k+1$ números consecutivos, um deles é ímpar e > 1, e portanto tem um divisor primo ímpar. Mas isso é uma contradição. Segue que $k = 1$ e $b = 3$. De $2^a + 1 = 3^2$ vem $a = 3$. □

7.5 Problemas

Problema 7.5.1. Determine as decomposições canônicas de 585 e 23100.

Problema 7.5.2. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética, determine o menor número natural positivo m tal que $315 \cdot m$ é um quadrado perfeito.

Problema 7.5.3. Demonstre que todo número natural $n \geq 1$ se escreve de maneira única na forma $n = 2^a b$, em que $a \geq 0$ é um número natural e $b \geq 1$ é ímpar.

Problema 7.5.4. Demonstre que, para todo número natural n, n^3 é um quadrado perfeito se e somente se n é um quadrado. Além disso, se $n^3 = m^2$ então m é um número cúbico e $\sqrt[3]{m} = \sqrt[2]{n}$.

Problema 7.5.5. **a)** Prove que se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_s^{e_s}$ é a decomposição canônica de n como produto de primos, então n é um quadrado perfeito se e somente se e_i é par para todo $1 \leq i \leq s$. **b)** Prove que se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_s^{e_s}$ é a decomposição canônica de n como produto de primos, então n é a k-ésima potência de um número natural se e somente se e_i é múltiplo de k para todo $1 \leq i \leq s$.

Problema 7.5.6. Uando o Teorema Fundamental da Aritmética demonstre que se p é primo então não existem números naturais positivos a e b tais que $a^2 = pb^2$.

Problema 7.5.7. Sejam a, b e $n \geq 1$ números naturais. Prove que se a^n divide b^n então a divide b.

Problema 7.5.8. Consideremos o conjunto $S = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$ formado pelos números da forma $1+3k$, $k \geq 0$. S é fechado em relação à multiplicação. Dizemos que um número $a > 1$ de S é *primo em* S quando não pode ser decomposto na forma $a = bc$ com $b > 1$ e $c > 1$ elementos de S. **a)** Prove que todo elemento $a > 1$ de S é primo em S ou é produto de primos em S. **b)** Verifique que em S não vale a unicidade da decomposição em produto de primos.

7.6 Aplicações

Uma importante aplicação é:

Teorema 7.11. *Se a e b são números naturais relativamente primos e se $ab = m^2$ para algum número natural m então a e b são quadrados perfeitos.*

Demonstração. Se $a = 1$ ou $b = 1$ o resultado é claro. Suponhamos $a > 1$ e $b > 1$. Seja p um primo que divide a, e seja e o expoente de p na decomposição canônica de a. Naturalmente p é um divisor de m, e p comparece na decomposição canônica de m^2 com expoente par, digamos $2f$. Como p não é divisor de b e $ab = m^2$, temos $p^e = p^{2f}$, em virtude da unicidade da decomposição garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Isto implica $e = 2f$. Fica provado que na decomposição canônica de a os expoentes são todos pares, e assim a é um quadrado perfeito. O mesmo resultado se aplica a b. □

O Teorema Fundamental da Aritmética nos fornece um método para contar e listar os divisores de um número natural. Vejamos primeiro uma caracterização desses divisores.

Teorema 7.12. *Se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_s^{e_s}$ é a decomposição canônica do número natural $n > 1$ então m é divisor de n se e somente se é da forma $m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \dots p_s^{f_s}$ com $0 \leq f_i \leq e_i$ para todo i.*

Demonstração. Se $m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \dots p_s^{f_s}$ com $0 \leq f_i \leq e_i$ para todo i então

$$n = m\left(p_1^{e_1-f_1} p_2^{e_2-f_2} p_3^{e_3-f_3} \dots p_s^{e_s-f_s}\right)$$

e portanto m é divisor de n.

Reciprocamente seja m um divisor de n. Os únicos primos que podem comparecer na decomposição canônica de m são os primos p_i. Portanto podemos escrever $m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \dots p_s^{f_s}$ com $0 \leq f_i$ (se algum p_i não comparece isso significa que $f_i = 0$). Como $p_i^{f_i}$ divide n então $f_i \leq e_i$. Isto termina a demonstração. □

Notemos que 1 é um divisor de n e 1 é da forma requerida pelo Teorema 7.12, pois se escreve como $1 = p_1^0 p_2^0 p_3^0 \ldots p_s^0$, com $f_i = 0$ para todo i. Se $f_i = e_i$ para todo i temos o caso em que o divisor é o próprio n.

O Teorema 7.12 nos dá um método para contar a quantidade de divisores de n. Observando a forma dos divisores de n, vemos que cada primo p_i comparece com expoentes que vão de 0 a e_i, portanto, com $e_i + 1$ expoentes diferentes. Assim para cada uma das $e_1 + 1$ escolhas de $p_1^{f_1}$, com $0 \leq f_1 \leq e_1$, podemos escolher $e_2 + 1$ potências de p_2, e para cada uma dessas escolhas podemos escolher $e_3 + 1$ potências de p_3, e assim sucessivamente. Isto nos dá um total de $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_s + 1)$ divisores de $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_s^{e_s}$.

Problema resolvido 7.13. Calcule a quantidade de divisores de 1008.

Solução. Como $1008 = 2^4 3^2 7^1$ então a quantidade de divisores é $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30$. □

Vamos listar organizadamente os divisores de 1008 como uma ilustração da observação acima.

$$
\begin{array}{cccccc}
2^0 3^0 7^0 & 2^0 3^1 7^0 & 2^0 3^2 7^0 & 2^0 3^0 7^1 & 2^0 3^1 7^1 & 2^0 3^2 7^1 \\
2^1 3^0 7^0 & 2^1 3^1 7^0 & 2^1 3^2 7^0 & 2^1 3^0 7^1 & 2^1 3^1 7^1 & 2^1 3^2 7^1 \\
2^2 3^0 7^0 & 2^2 3^1 7^0 & 2^2 3^2 7^0 & 2^2 3^0 7^1 & 2^2 3^1 7^1 & 2^2 3^2 7^1 \\
2^3 3^0 7^0 & 2^3 3^1 7^0 & 2^3 3^2 7^0 & 2^3 3^0 7^1 & 2^3 3^1 7^1 & 2^3 3^2 7^1 \\
2^4 3^0 7^0 & 2^4 3^1 7^0 & 2^4 3^2 7^0 & 2^4 3^0 7^1 & 2^4 3^1 7^1 & 2^4 3^2 7^1
\end{array}
$$

A quantidade de divisores de um número natural, assim como a soma desses divisores, têm um papel importante na Teoria dos Números, de modo que destacamos essas funções na

Definição 7.14. A função $\tau : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$ definida por $\tau(n) =$ *quantidade de divisores de* n chama-se *função tau*. A função $\sigma : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$ definida por $\sigma(n) =$ *soma dos divisores de* n chama-se *função sigma*.

Teorema 7.15. *Se* $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_s^{e_s}$ *então*

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_s + 1) \tag{7.5}$$

e

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_s^{e_s+1} - 1}{p_s - 1} \tag{7.6}$$

Demonstração. A fórmula para $\tau(n)$ já foi comentada. Quanto a $\sigma(n)$ observe que

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{e_1}) \cdots (1 + p_s + p_s^2 + \ldots + p_s^{e_s})$$

A fórmula 7.6 para $\sigma(n)$ segue da expressão da soma dos termos de uma progressão geométrica. □

Pode ser útil para o estudante decifrar o

Teorema 7.16. *Sejam n e m números naturais quaisquer e escrevamos $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_s^{e_s}$ e $m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \ldots p_s^{f_s}$ como produto de primos, sendo p_1, p_2, ..., p_s primos diferentes dois a dois e $e_i \geq 0$ e $f_i \geq 0$ para todo i. Então*

$$\text{mdc}(n, m) = p_1^{g_1} p_2^{g_2} p_3^{g_3} \ldots p_s^{g_s}$$

e

$$\text{mmc}(n, m) = p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \ldots p_s^{h_s}$$

com $g_i = min\{e_i, f_i\}$ e $h_i = max\{e_i, f_i\}$.

Demonstração. Exercício para o estudante. □

Aproveitamos a oportunidade para apresentar uma propriedade do mmc. Se $b \neq 0$ é um divisor de a uma forma de economizar notação consiste em indicar por $\frac{a}{b}$ o quociente de a por b. Isto é, $\frac{a}{b}$ é o número natural q tal que $a = bq$.

Teorema 7.17. *Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais, e seja $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Os múltiplos comuns de a e b são os números da forma $\frac{ab}{d}t$ para algum número natural t. Em particular* $\mathrm{mmc}(a, b) = \frac{ab}{d}$.

Demonstração. Notemos que $\frac{ab}{d}$ é o número natural tal que $\frac{ab}{d}d = ab$, e $\frac{a}{d}$ é o número natural tal que $\frac{a}{d}d = a$. Substituindo a segunda relação na primeira vem $\frac{ab}{d}d = \frac{a}{d}db$, o que implica $\frac{ab}{d} = \frac{a}{d}b$. Portanto $\frac{ab}{d}$ é múltiplo de b. Da mesma forma se verifica que $\frac{ab}{d}$ é múltiplo de a. Concluímos que todo número da forma $\frac{ab}{d}t$ para algum número natural t é múltiplo comum de a e b.

Seja m um múltiplo comum de a e b. Existem números naturais a_1 e b_1 tais que $m = aa_1$ e $m = bb_1$. Portanto $aa_1 = bb_1$. Como $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ existem números naturais positivos a_2 e b_2 tais que $a = da_2$ e $b = db_2$. Por substituição de a e b em $aa_1 = bb_1$ obtemos $da_2a_1 = db_2b_1$. Cancelando d vem $a_2a_1 = b_2b_1$. Vemos assim que b_2 é divisor de a_2a_1. Em virtude do resultado do Problema 7.3.12 sabemos que $\mathrm{mdc}(a_2, b_2) = 1$. Usando o Teorema 7.3 segue que b_2 é divisor de a_1. Seja t o número natural tal que $a_1 = b_2t$. Das identidades acima vem $dm = daa_1 = dab_2t = abt$. Por outro lado $\frac{ab}{d}d = ab$. Substituindo essa relação na anterior temos $dm = \frac{ab}{d}dt \Rightarrow m = \frac{ab}{d}t$.

Isto prova que todo múltiplo comum de a e b é da forma $\frac{ab}{d}t$ para algum número natural t. O menor valor positivo certamente é assumido para $t = 1$, de modo que $\mathrm{mmc}(a, b) = \frac{ab}{d}$, o que termina a demonstração. □

Escólio 7.18. *Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais. Todo múltiplo comum positivo de a e b é múltiplo de* $\mathrm{mmc}(a, b)$. *Além disso* $\mathrm{mmc}(a, b)\,\mathrm{mdc}(a, b) = ab$.

Demonstração. Essas afirmações estão contidas no Teorema acima. □

Problema resolvido 7.19. Sejam a e t números naturais positivos. Calcule a quantidade de múltiplos de t no conjunto $\{a, 2a, 3a, \ldots, ta\}$.

Solução. A quantidade é $\mathrm{mdc}(a, t)$. Vejamos. Se j é um número natural positivo tal que ja é múltiplo de t então ja é múltiplo comum de t e de a, portanto é múltiplo de $\mathrm{mmc}(a, t)$, e é da forma $i\,\mathrm{mmc}(a, t)$ para algum número natural i. Reciprocamente todo múltiplo de $\mathrm{mmc}(a, t)$ é também múltipo de a, portanto é da forma ja para algum número natural j.

Consideremos então os múltiplos positivos de $\mathrm{mmc}(a, t)$:

$$1 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \quad 2 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \quad 3 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \ldots, i \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \ldots$$

Quando $i = \mathrm{mdc}(a, t)$ esse múltiplo é $\mathrm{mdc}(a, t) \cdot \mathrm{mmc}(a, t) = at$, em virtude do Escólio 7.18. Consideremos então a lista

$$1 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \quad 2 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \quad 3 \cdot \mathrm{mmc}(a, t), \ldots \mathrm{mdc}(a, t) \cdot \mathrm{mmc}(a, t) = at$$

Essa lista tem exatamente $\mathrm{mdc}(a, t)$ elementos e constitui a coleção de todos os mútiplos de t no conjunto dado. □

Problema resolvido 7.20. Para todo número natural n a soma $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ forma uma sequência crescente de números reais. É um fato conhecido que estes valores crescem ultrapassando qualquer número dado. Mostre que os valores S_n nunca são números naturais.

Solução. Fixado n, seja k o maior número natural tal que $2^k \leq n$. Indicamos por I o produto de todos os números ímpares $\leq n$. Dado um número natural i tal que $1 \leq i \leq n$, vejamos como é o produto $I2^{k-1}\frac{1}{i}$. Se for $i = 2^k$, então $I2^{k-1}\frac{1}{i} = I2^{k-1}\frac{1}{2^k} = I\frac{1}{2}$, que não é um número natural, pois I é ímpar. Suponhamos $i \neq 2^k$. Sabemos que i se escreve na forma $i = 2^j m$, sendo j e m números naturais, com m ímpar. Como $i \leq n$ vem $m \leq n$ e então m é um dos fatores do produto I. Portanto I/m é um número natural. Ainda $2^j \leq 2^j m \leq n$, portanto $j \leq k$, por definição de k. Se $m = 1$ temos $j < k$ pois $i \neq 2^k$. Se $m > 1$ temos $2^j < 2^{j+1} \leq 2^j m \leq n$, portanto $j < k$. Dessa forma $I2^{k-1}\frac{1}{i}$ é um número natural sempre que $i \neq 2^k$. Concluímos que $I2^{k-1}S_n = t + \frac{I}{2}$, para algum número natural t. Portanto $t + \frac{I}{2}$ não é um número natural. Terminamos observando que S_n não é um número natural porque, se fosse, $I2^{k-1}S_n$ também o seria. □

7.7 Problemas

Problema 7.7.1. Platão, em *As Leis*, comenta propriedades do número 5040, mencionando que ele é múltiplo comum dos números de 1 a 10 e que ele tem 59 divisores não contando com ele mesmo. Verifique as afirmações de Platão. Verifique se 5040 é o menor múltiplo comum dos números de 1 a 10.

Problema 7.7.2. Usando a função $\tau(n)$ investigue sob que condições sobre o número natural $n \geq 2$ sua quantidade de divisores positivos é ímpar.

Problema 7.7.3. Demonstre que, se $n \geq 2$ é um número natural, escolhendo-se $n+1$ números quaisquer dentre 1, 2, 3, ..., $2n$, existem pelo menos dois dentre os escolhidos tais que um é múltiplo do outro.

Problema 7.7.4. Se $n^3 = m^2$ então n é um quadrado e m é cúbico.

Problema 7.7.5. Demonstre que se a e b são números naturais relativamente primos e se $ab = m^k$ para números naturais m e k então a e b são potências k-ésimas de números naturais.

Problema 7.7.6. Encontre condições suficientes de forma que se $a_1 a_2 \ldots a_l = m^k$ então todo a_i é uma potência k-ésima de um número natural para todo i.

Problema 7.7.7. Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais relativamente primos. Então $\text{mmc}(a, b) = ab$. Em particular, se p e q são primos diferentes, então $\text{mmc}(p, q) = pq$.

Problema 7.7.8. Demonstre que quaisquer que sejam os números naturais t, a e b se tem $\text{mmc}(ta, tb) = t\,\text{mmc}(a, b)$.

Problema 7.7.9. Na Seção 7.6 definimos $\frac{a}{b}$ como o quociente de a por b, desde que $b \neq 0$ seja um divisor de a. Mostre que $\frac{a}{b}$ se comporta como uma fração usual. Por exemplo, $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, $c\frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Problema 7.7.10. Sejam a, b e $c \neq 0$ números naturais tais que c é divisor de a e b. Sejam $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ os quocientes de a por c e de b por c, respectivamente. Demonstre que $\text{mdc}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{\text{mdc}(a,b)}{c}$.

Problema 7.7.11. **a)** Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais. Explique por que $\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(\text{mmc}(a, b))$. **b)** Mostre que, quaisquer que sejam os números naturais a_1, a_2, ..., a_n não nulos,

$$\text{mmc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{mmc}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \text{mmc}(a_{n-1}, a_n))$$

Problema 7.7.12. Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números naturais. Demonstre que $\frac{\text{mmc}(a,b)}{a}$ e $\frac{\text{mmc}(a,b)}{b}$ são relativamente primos.

Problema 7.7.13. Explique por que funciona corretamente o seguinte procedimento para verificar se um dado número natural $10 < p < 10000$ ímpar é ou não primo.

Seja P o produto dos primos ímpares < 100. Mais exatamente,

$$P = 1152783981972759212376551073665878035$$

Dado $10 < p < 10000$ ímpar, siga as instruções:

(i) se $11 \leq p \leq 99$ calcule $d = \text{mdc}(105, p)$;

(ii) se $101 \leq p < 10000$ calcule $d = \text{mdc}(P, p)$;

Se $d = 1$, então p é primo. Se $d > 1$ então p é composto.

Este método é usado em alguns aplicativos computacionais, pois para um computador é relativamente fácil calcular o mdc usando o algoritmo de Euclides.

Problema 7.7.14. Sejam n um número natural e p um primo. Mostre que o maior expoente k tal que p^k divide $n!$ é

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

Por que esta soma é finita? Essa fórmula vale se p for composto? Por quê?

7.8 Os números perfeitos

Alguns historiadores atribuem aos antigos matemáticos gregos da Escola Pitagórica a observação de que alguns números naturais guardam uma relação especial com seus divisores. Por exemplo,

$$6 = 1 + 2 + 3$$

e

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

são iguais à soma de seus divisores diferentes deles mesmos. Dessa forma foi definida a seguinte classe de números:

Definição 7.21. Um número natural chama-se *perfeito* se for igual à soma de seus divisores exceto ele mesmo.

Os antigos matemáticos constataram que não é fácil encontrar números perfeitos. Percebe-se logo que eles são raros. Uma maneira de fazer isso certamente consiste em encontrar uma fórmula que forneça tais números. Quem sabe conseguimos obter uma fórmula examinando os primeiros números perfeitos. A decomposição canônica dos três primeiros números perfeitos é

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 28 &= 2^2 \cdot 7 \\ 496 &= 2^4 \cdot 31 \end{aligned}$$

Vemos que esses números consistem de uma potência de 2 seguida de um número primo, sendo que este é o antecessor de uma potência de 2. Mais exatamente,

$$\begin{aligned}6 &= 2^1 \cdot (2^2 - 1)\\ 28 &= 2^2 \cdot (2^3 - 1)\\ 496 &= 2^4 \cdot (2^5 - 1)\end{aligned}$$

Esta lista nos sugere a fórmula $2^{j-1}(2^j - 1)$, sendo $2^j - 1$ um primo. Esta última condição deve ser importante, pois a lista acima não contém o número $2^3(2^4 - 1)$, sendo $2^4 - 1 = 15$, que não é primo.

Esta fórmula para números perfeitos foi observada por Euclides no Livro IX de *Os Elementos*, escrito por volta de 350 a. C. Ele demonstra o

Teorema 7.22. *Seja $j \geq 2$ um número natural. Se $2^j - 1$ é primo então $2^{j-1}(2^j - 1)$ é perfeito.*

Demonstração. Como $2^j - 1$ é primo, os divisores de $2^{j-1}(2^j - 1)$, exceto ele mesmo, são

$$1 \qquad 2 \qquad 2^2 \qquad \ldots \qquad 2^{j-2} \qquad 2^{j-1}$$

e

$$2^j - 1 \quad 2(2^j - 1) \quad 2^2(2^j - 1) \quad \ldots \quad 2^{j-2}(2^j - 1)$$

A soma desses números resulta $2^{j-1}(2^j - 1)$, terminando a demonstração. □

L. Euler, aproximadamente 2000 anos depois de Euclides, demonstrou que todo número perfeito par é da forma $2^{j-1}(2^j - 1)$, com $2^j - 1$ primo, para algum $j \geq 2$.

A fórmula de Euclides para os números perfeitos levou à pesquisa dos números primos da forma $2^j - 1$. Esses números são hoje denominados *números de Mersenne*, em homenagem ao frade Marin Mersenne, que incentivou seu estudo.

7.9 Problemas

Problema 7.9.1. Segundo o autor [14], página 219, Nicômano, por volta do ano 100, conhecia os seguintes números perfeitos:

$$P_1 = 6, \quad P_2 = 28, \quad P_3 = 496 \quad \text{e} \quad P_4 = 8128$$

Prove que esses números são perfeitos e que são os únicos números perfeitos ≤ 10000.

Problema 7.9.2. Indicando por P_n o n-ésimo número perfeito, verifique que

$$P_5 = 33\,550\,336 \quad \text{e} \quad P_6 = 8\,589\,869\,056$$

Problema 7.9.3. Prove que o número natural n é perfeito se e somente se $\sigma(n) = 2n$.

Problema 7.9.4. Os números naturais m e n dizem-se *amigos* se a soma dos divisores de m, exceto ele mesmo, for igual a n, e se a soma dos divisores de n, exceto ele mesmo, for igual a m. Mostre que 220 e 284 são números amigos.

7.10 Problemas adicionais

Problema 7.10.1. Prove que $p > 1$ é primo se e somente se $\text{mdc}((p-1)!, p) = 1$.

Problema 7.10.2. Calcule o número natural n sabendo que $8^2 \cdot 55^n$ tem 700 divisores.

Problema 7.10.3. Sejam p, q e r três primos e α, β, γ e δ números naturais tais que p^δ é divisor de $p^\alpha q^\beta r^\gamma$. Prove que $\delta \leq \alpha$.

Problema 7.10.4. Prove que se a, $b \neq 0$ e c são números naturais tais que b é divisor de c então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a + c, b)$.

Problema 7.10.5. Demonstre que $\text{mdc}(a, b)$ divide $\text{mdc}(a, bc)$ quaisquer que sejam os números naturais não nulos a, b e c.

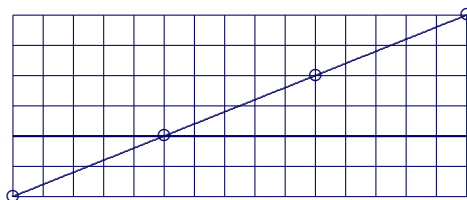
Problema 7.10.6. Sejam a, b e $n > 0$ números naturais tais que $\text{mdc}(a^n, b^n) = 1$. Ache $\text{mdc}(a, b)$.

Problema 7.10.7. Demonstre o seguinte caso particular do Pequeno Teorema de Fermat, conhecido dos antigos matemáticos chineses: se p é primo então p é divisor de $2^p - 2$.

Problema 7.10.8. Demonstre que se p é primo e divide $a^p + b^p$ então p divide $(a+b)^p$, quaisquer que sejam os números naturais a e b. Conclua que, nestas condições, p divide $a + b$.

Problema 7.10.9. Seja $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_s^{e_s}$ a decomposição canônica de n, e suponha que exista algum e_i ímpar. Prove que $\sqrt{n}$ não é racional. Conclua que $\sqrt{n}$ é racional se e somente se for um número natural.

Problema 7.10.10. Estude e justifique o seguinte método geométrico para calcular o mdc e o mmc. Sejam a e b números naturais não nulos. Consideremos o retângulo de lados a e b. Subdividimos o retângulo em ab quadrados unitários e traçamos uma das diagonais do retângulo. Então $\text{mdc}(a, b)$ é a quantidade de vértices de quadrados unitários menos um que a diagonal contém. Para calcular $\text{mmc}(a, b)$, trace um segmento horizontal, ao longo da região retangular, passando por um vértice de quadrado unitário encontrado pela diagonal, o mais próximo de um dos lados horizontais do retângulo. A área do sub-retângulo menor determinado por esse segmento é $\text{mmc}(a, b)$.

A figura abaixo ilustra o caso em que $a = 15$ e $b = 6$. A diagonal passou por 4 vértices de quadrados unitários, portanto $\text{mdc}(15, 6) = 3$. O sub-retângulo tem área $2 \times 15 = 30$, portanto $\text{mmc}(15, 6) = 30$.

Problema 7.10.11. Mil armários estão enfileirados e numerados de 1 a 1000 em ordem crescente. Mil estudantes também numerados de 1 a 1000 começam a seguinte brincadeira:

O estudante 1 passa por todos os armários (que inicialmente estavam fechados) e abre suas portas. O estudante 2 passa por todos os armários e inverte as posições das portas dos armários 2, 4, 6, ... O estudante 3 passa por todos os armários e inverte as posições das portas dos armários 3, 6, 9, ... E assim sucessivamente, todos os estudantes passam em ordem

por todos os armários e cada um inverte a posição da porta dos armários cujos números são múltiplos de seu próprio número.

Determine quais os números dos armários que ficam abertos após a passagem de todos os estudantes.

Problema 7.10.12. Esta é uma demonstração alternativa do Corolário 7.4, que não faz uso de propriedades do mdc. Vi essa demonstração em [57], página 21. O autor a atribui a Alwin R. Korselt. O estudante pode completar os detalhes.

O resultado a ser provado é: Se p é primo e se p é divisor de ab então p é divisor de a ou de b, quaisquer que sejam os números naturais a e b.

Para demonstrar observemos iniciamente que se $a = 0$ ou $b = 0$ o resultado é verdadeiro. Suponhamos então $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Suponhamos que o resultado seja falso, e seja p o menor primo para o qual existem números naturais $a \neq 0$ e $b \neq 0$ tais que p é divisor de ab mas não de a e nem de b. Sejam

$$\begin{array}{rcll} a & = & pq_1 + r_1 & \quad 0 < r_1 < p \\ b & = & pq_2 + r_2 & \quad 0 < r_2 < p \end{array} \tag{7.7}$$

Multiplicando essas identidades vemos que p divide r_1r_2, portanto existe um número natural c tal que $r_1r_2 = pc$. Se fosse $c = 1$ teríamos $r_1 = p$ ou $r_2 = p$, o que não ocorre devido às relações 7.7. Portanto $c > 1$. Ainda de 7.7 temos $c < p$. Consideremos uma decomposição de c como produto de números primos, e seja p_i um primo dessa decomposição. Então $p_i < p$ e p_i é divisor de r_1r_2. Como o resultado é verdadeiro para p_i, temos que p_i é divisor de r_1 ou de r_2. Simplificando p_i na relação $r_1r_2 = pc$ encontramos números s_1 e s_2 divisores respectivamente de r_1 e r_2 tais que $s_1s_2 = p$. Como p é primo segue que $s_1 = p$ ou $s_2 = p$. Usando novamente 7.7 vem que p é divisor de a ou de b, o que é uma contradição.

Problema 7.10.13. A seguinte demonstração da unicidade do Teorema Fundamental da Aritmética não faz uso de propriedades do mdc. É devida a Ernst Zermelo, e é de 1912. Vi essa demonstração em [71], página 142. O estudante poderá completar os detalhes.

Suponhamos que, no Teorema Fundamental da Aritmética, a unicidade da decomposição não seja verdadeira. Seja $n > 1$ o menor número natural para o qual isso ocorre. Sejam

$$n = p_1p_2 \ldots p_s = q_1q_2 \ldots q_t$$

decomposições diferentes de n como produto de primos. Podemos escolher a notação de modo que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_s$ e $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_t$. É claro que $s > 1$ e $t > 1$. Temos $p_1 \neq q_1$. De fato, se fosse $p_1 = q_1$ existiria um número natural $< n$ com decomposições diferentes. Portanto $p_1 \neq q_1$. Suponhamos $p_1 < q_1$ sem perda de generalidade.

Consideremos o número $m = n - p_1q_2q_3 \ldots q_t$. Temos $0 < m < n$. Ainda $m = (q_1 - p_1)q_2q_3 \ldots q_t$ e $m = p_1(p_2 \ldots p_s - q_2 \ldots q_t)$. Portanto p_1 é um primo divisor de m. Como vale a unicidade da decomposição para m, p_1 é fator de $q_1 - p_1$, o que é uma contradição.

7.11 Temas para investigação

Tema 7.11.1. Seja 97# o produto de todos os primos ≤ 97. Investigue para quais inteiros $p > 1$ vale a seguinte afirmação:

$$p \text{ é primo} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{mdc}(97\#, p) = 1$$

Tema 7.11.2. Investigue se vale a recíproca do resultado do Problema 7.10.7 para $p > 1$.

Tema 7.11.3. Consideremos o resultado do Problema 7.10.7. **a)** Prove que se $p > 2$ é primo então p é divisor de $2^{p-1} - 1$. **b)** Observe que se $p > 2$ é primo então $p - 1$ é par e $2^{p-1} - 1$ pode ser fatorado no produto de $2^{(p-1)/2} + 1$ e $2^{(p-1)/2} - 1$. Como p é primo então ele divide pelo menos um desses dois fatores. Investigue sob que condições sobre p se pode afirmar que ele divide o primeiro fator, o mesmo para o segundo.

Tema 7.11.4. Investigue sob que condições sobre n o número $2^n + 1$ pode ser primo. Alguma demonstração? E quanto a $a^n + 1$?

Tema 7.11.5. Observe os seguintes eventos e faça conjecturas sobre os primos que aparecem. Alguma demonstração?

$2^2 + 1 = 5$
$3^2 + 1 = 10 = 2 \cdot 5$
$4^2 + 1 = 17$
$5^2 + 1 = 26 = 2 \cdot 13$
$6^2 + 1 = 37$
$7^2 + 1 = 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
$8^2 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$
$9^2 + 1 = 82 = 2 \cdot 41$
$10^2 + 1 = 101$
$11^2 + 1 = 122 = 2 \cdot 61$

Tema 7.11.6. Vimos no Problema 4.8.25, na página 106, que as potências quárticas estão nas classes resto zero e resto 1 módulo cinco. Em geral, o que se pode afirmar sobre as $(n - 1)$-potências e as classes módulo n?

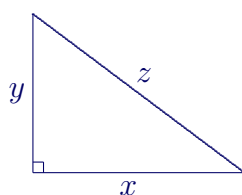
Capítulo 8

Os ternos pitagóricos

8.1 Introdução

O conhecimento da identidade numérica $3^2 + 4^2 = 5^2$ é de um tempo bastante remoto e sua relação com o triângulo retângulo deu ensejo ao seu uso prático na determinação de ângulos retos em construções arquitetônicas. No mundo antigo essa identidade despertou o interesse dos matemáticos na investigação de métodos que permitissem obter outros números naturais que estão na mesma relação. Posteriormente, no tempo de Euclides, em Alexandria, essa investigação evoluiu para o problema da determinação de todas as soluções de $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y e z números naturais positivos.

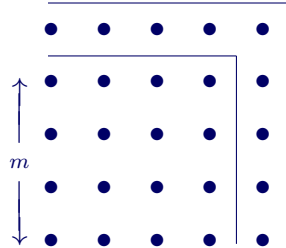
8.2 Os ternos pitagóricos

Denominamos *terno*[1] *pitagórico* a qualquer conjunto de números naturais positivos x, y e z tais que $x^2 + y^2 = z^2$. A denominação "terno pitagórico" se deve a que, em virtude do Teorema de Pitágoras, a todo terno pitagórico x, y e z corresponde um triângulo retângulo com catetos x e y e hipotenusa z. Indicaremos os ternos pitagóricos também por (x, y, z).

Os antigos matemáticos sumérios conheciam o Teorema de Pitágoras (muito antes de Pitágoras) assim como a relação $3^2+4^2 = 5^2$. Investigavam os números dirigidos por um senso estético que tinha como finalidade a beleza. Sensibilizados pelo impulso de completar o inacabado, eles se perguntaram se existiam outros ternos de números naturais (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 = z^2$, e qual a forma de obtê-los. E de fato construíram um método para isso. Podemos facilmente descrever sua metodologia utilizando nossa linguagem algébrica. Tomando um número racional $r \neq 0$ e seu recíproco r^{-1}, consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} w + v &= r \\ w - v &= r^{-1} \end{cases} \tag{8.1}$$

[1] Aqui "terno" significa grupo de três números.

A solução deste sistema fornece números racionais w e v tais que $1+v^2 = w^2$. Multiplicando essa identidade por um número natural adequado se obtém um terno pitagórico. Por exemplo, se $r = 5$ obtemos $w = 13/5$ e $v = 12/5$. Multiplicando a identidade $(13/5)^2 = (12/5)^2 + 1$ por 5^2 vem $13^2 = 12^2 + 5^2$, que fornece o terno pitagórico $(5, 12, 13)$.

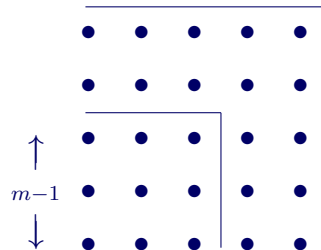
Acostumados a identificar números com figuras, os matemáticos da Escola Pitagórica utilizavam o seguinte método para obter ternos pitagóricos. Consideravam um número quadrado da forma $(m+1)^2$, e separavam a figura quadrada correspondente em um quadrado menor com m^2 pontos e um gnômon com $2m + 1$ pontos. Portanto $(2m + 1) + m^2 = (m + 1)^2$.

Escolhendo m de modo que $2m+1$ seja um quadrado perfeito, digamos $2m+1 = n^2$, temos $n^2 + m^2 = (m + 1)^2$, o que fornece o terno pitagórico $(n, m, m + 1)$. A figura acima sugere considerar $m = 4$. Então $2m + 1 = 9 = 3^2$, do que resulta $(3, 4, 5)$. Tomando $m = 12$ temos $(5, 12, 13)$.

Vamos obter um formato mais adequado para esses ternos pitagóricos. De $2m + 1 = n^2$ temos $m = (n^2 - 1)/2$ e $m + 1 = (n^2 + 1)/2$. Portanto

Teorema 8.1. *Qualquer que seja o número natural ímpar $n \geq 3$, são pitagóricos os ternos*

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right)$$

Eventuais escritos de Pitágoras ou de seus discípulos mais contemporâneos relatando esses assuntos não chegaram até nós, mas Proclus, em seus comentários sobre a história da Matemática, atribui a ele essa descoberta (confira [111], página 8 e [44], página 47).

Método similar era utilizado pela Escola Platônica através de uma modificação do método anterior. Exemplificamos com a figura

em que vemos um quadrado $(m + 1)^2$ repartido em um quadrado menor $(m - 1)^2$ e em dois gnômons com $4m$ pontos. Portanto $4m + (m - 1)^2 = (m + 1)^2$. Se m é um quadrado, digamos $m = n^2$, temos $4m = (2n)^2$ e $(2n)^2 + (m - 1)^2 = (m + 1)^2$. Reescrevendo tudo em função de n temos o

Teorema 8.2. *Qualquer que seja o número natural $n \geq 2$, são pitagóricos os ternos*

$$\left(2n, n^2 - 1, n^2 + 1\right)$$

Nenhum desses métodos fornece todos os ternos pitagóricos. O ideal matemático então em construção exigia que se encontrasse uma caracterização completa desses ternos. Procurava-se resolver o seguinte problema:

Encontrar todas as soluções da equação

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{com } x, y, z \text{ naturais positivos.} \tag{8.2}$$

Não é difícil resolver 8.2. Usando propriedades de figuras geométricas, indexauthorsEuclides (c. 300 a. C.)Euclides, no Livro II de *Os Elementos*, observou a relação

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \tag{8.3}$$

Portanto, se $a > b$ são números naturais tais que $\sqrt{ab}$, $(a-b)/2$ e $(a+b)/2$ sejam ainda números naturais, então $\big(\sqrt{ab}, (a-b)/2, (a+b)/2\big)$ é um terno pitagórico. Ainda mais, esta fórmula caracteriza os ternos pitagóricos, de acordo com o

Teorema 8.3 (Euclides)**.** *(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem números naturais $a > b$, de mesma paridade, tais que ab é um quadrado perfeito e $(x, y, z) = \big(\sqrt{ab}, (a-b)/2, (a+b)/2\big)$.*

Vejamos uma demonstração detalhada desse teorema. Necessitamos de alguns resultados preliminares.

Lema 8.4. *Se $z > y$ são números naturais então $z+y$ e $z-y$ são números naturais de mesma paridade.*

Demonstração. De fato, se y e z são ambos pares ou ambos ímpares, sua soma e sua diferença são pares. Por outro lado, se y for par e z for ímpar, ou o contrário, sua soma e sua diferença são ímpares. Portanto $z + y$ e $z - y$ são números naturais de mesma paridade. □

Lema 8.5. *Se os números naturais a e b têm a mesma paridade, então $(a+b)/2$ é um número natural. Se também ocorrer que $a > b$, então $(a-b)/2$ é número natural.*

Estes resultados não valem se os números a e b têm paridade oposta. Por exemplo, $(9 + 8)/2 = 17/2$ e $(9-8)/2 = 1/2$ não são números naturais.

Demonstração. A soma e a diferença de pares é par, assim como a soma e a diferença de ímpares. Portanto $(a+b)/2$ e $(a-b)/2$ são números naturais. □

Demonstração do Teorema 8.3 Seja (x, y, z) um terno pitagórico. Então x, y e z são números naturais tais que $x^2 + y^2 = z^2$. Podemos escrever $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$. Sejam $a = z + y$ e $b = z - y$. Como $z > y$ então a e b são números naturais tais que $a > b$, e como $x^2 = ab$ segue que ab é um quadrado perfeito. Temos ainda que a e b têm a mesma paridade (Lema 8.4). Resolvendo o sistema $a = z + y$ e $b = z - y$ em y e z obtemos $y = (a-b)/2$ e $z = (a+b)/2$. Portanto $(x, y, z) = (\sqrt{ab}, (a-b)/2, (a+b)/2)$.

Reciprocamente, sejam $a > b$ números naturais de mesma paridade tais que ab é um quadrado perfeito. Seja $(x, y, z) = (\sqrt{ab}, (a-b)/2, (a+b)/2)$. Pelo fato de a e b terem a mesma paridade, $z = (a+b)/2$ e $y = (a-b)/2$ são números naturais (Lema 8.5). Pelo fato de ab ser um quadrado perfeito, $x = \sqrt{ab}$ é um número natural. Calculando $x^2 + y^2$ obtemos z^2, do que resulta que (x, y, z) é um terno pitagórico. □

8.3 Problemas

Problema 8.3.1. Demonstre que se (x, y, z) é um terno pitagórico então existe um triângulo retângulo com catetos x e y e hipotenusa z.

Problema 8.3.2. Encontre todas as soluções de 8.3 supondo que pelo menos um dos números x, y ou z seja igual a zero.

Problema 8.3.3. **a)** Resolva o sistema 8.1 descrito na página 179 e verifique que sua solução fornece números racionais w e v tais que $1 + v^2 = w^2$. **b)** Tomando $r = 12/5$, use esse método para obter um terno de números pitagóricos. Encontre outros exemplos numéricos. **c)** Tomando $r = n$, sendo n um número natural, encontre uma fórmula que fornece infinitos ternos pitagóricos. **d)** O que acontece se $r = m/n$?

Problema 8.3.4. **a)** Demonstre os teoremas 8.1 (página 180) e 8.2 (página 180). **b)** Verifique que estas fórmulas, mesmo tomadas conjuntamente, não fornecem todos os ternos pitagóricos.

Problema 8.3.5. Segundo [111] página 9, na antiga Índia se usava o seguinte método para obter ternos pitagóricos. Escrevendo $x^2+y^2 = z^2$ na forma $x^2 = z^2-y^2$ temos $x^2 = (z+y)(z-y)$. Impondo uma condição adequada para $z-y$, por exemplo $z-y = 1$, e tomando um valor ímpar ≥ 3 para x, digamos, $x = 5$, resolvemos o sistema $z - y = 1$ e $z + y = 25$ e obtemos $y = 12$ e $z = 13$. Isto nos dá o terno pitagórico $(5, 12, 13)$. **a)** Confirme as afirmações acima. **b)** Encontre outros ternos pitagóricos usando outros valores para x, por exemplo, $x = 3$, $x = 7$, etc. Por que x deve ser ímpar? **c)** Tomando $x = n$, sendo $n \geq 3$ um número natural, encontre uma fórmula geral para se obter ternos pitagóricos. **d)** O que ocorre se considerarmos $z - y = 2$?

Problema 8.3.6. Utilize o Teorema 8.3 para obter exemplos de ternos pitagóricos.

Problema 8.3.7. O autor [111], na página 7, descreve que uma antiga regra chinesa para o cômputo de números pitagóricos é equivalente a $(x, y, z) = (mn, (m^2 - n^2)/2, (m^2 + n^2)/2)$, sendo $m > n > 0$ números naturais de mesma paridade. **a)** Confirme que esta regra realmente fornece ternos pitagóricos. **b)** Encontre ternos pitagóricos usando esta regra. **c)** Mostre que esta regra não fornece todos os ternos pitagóricos. **d)** Deduza a antiga regra chinesa introduzindo os valores $x = mn$ e $z - y = n^2$ em $x^2 + y^2 = z^2$.

8.4 Ternos pitagóricos, o estado da arte

O problema da caracterização dos ternos pitagóricos tem outra solução, mais elegante do que a dada no Teorema 8.3. Para apresentá-la ao estudante necessitamos de algumas observações iniciais.

Observamos inicialmente que um terno pitagórico qualquer gera outros infinitos ternos mediante multiplicação por um número natural positivo. Por exemplo, multiplicando $(3, 4, 5)$ por 2 obtemos o terno $(6, 8, 10)$. Em geral, se (x, y, z) é um terno pitagórico e $k > 0$ é um número natural, então (kx, ky, kz) também é um terno pitagórico. De fato, $(kx)^2+(ky)^2 = k^2(x^2+y^2) = k^2z^2 = (kz)^2$.

Reciprocamente, dado um terno pitagórico (x, y, z), podemos eventualmente reduzi-lo a outro menor dividindo seus termos por algum divisor comum. Por exemplo, dividindo o terno pitagórico $(32, 60, 68)$ por 2 obtemos $(16, 60, 68)$, e por 4 obtemos $(8, 15, 17)$. Este último não se reduz mais, pois $\text{mdc}(8, 15, 17) = 1$, e assim 8, 15 e 16 não têm divisor comum > 1.

Em geral, dado um terno pitagórico (x, y, z), seja $d = \text{mdc}(x, y, z)$. Podemos escrever $x = dx_1$, $y = dy_1$ e $z = dz_1$, sendo x_1, y_1 e z_1 números naturais positivos. Então (x_1, y_1, z_1) também é um terno pitagórico. De fato, $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (dx_1)^2 + (dy_1)^2 = (dz_1)^2$. Podemos cancelar $d > 0$ e assim $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$.

Fica claro que para caracterizar os ternos pitagóricos basta determinar aqueles que estão na forma mais reduzida, pois todos os outros deles derivam.

Definição 8.6. Um terno pitagórico (x, y, z) diz-se *primitivo* quando x, y e z são relativamente primos, ou seja, se $\text{mdc}(x, y, z) = 1$.

Dados números naturais positivos x, y e z, seja d seu maior divisor comum. Então x/d, y/d e z/d são números naturais relativamente primos. De fato, em virtude do resultado do Problema 7.3.3 temos $d\,\text{mdc}(x/d, y/d, z/d) = \text{mdc}(d(x/d), d(y/d), d(z/d)) = d$. Cancelando d vem $\text{mdc}(x/d, y/d, z/d) = 1$.

Portanto, se (x, y, z) é um terno pitagórico, então $(x/d, y/d, z/d)$ é um terno pitagórico primitivo.

Lema 8.7. *Se (x, y, z) é um terno pitagórico, então x e y não podem ser ambos ímpares.*

Demonstração. Suponhamos que o sejam. Então existem números naturais p e q tais que $x = 2p+1$ e $y = 2q+1$. Segue que $z^2 = x^2 + y^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4t+2$, para um certo número natural t. Temos assim duas informações sobre z^2: é par e não tem 4 como fator. Mas isso não é possível. De fato, como z^2 é par, temos que z é par. Então podemos escrever $z = 2s$ para algum número natural s. Segue que $z^2 = (2s)^2 = 4s^2$, e z^2 tem 4 como fator, o que é uma contradição. Essa contradição se originou do fato de supormos x e y ambos ímpares. □

Lema 8.8. *Se (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo, então x e y têm paridade oposta.*

Demonstração. Já vimos que x e y não podem ser ambos ímpares. Se x e y são pares, da relação $x^2 + y^2 = z^2$ segue que z também é par, contrariando a hipótese de ser (x, y, z) um terno pitagórico primitivo. Concluímos que x e y têm paridade oposta. □

Se $m > n > 0$ são números naturais, considerando $r = m/n$ no método sumério 8.1, obtemos os ternos pitagóricos $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ (confira o Problema 8.3.3). Esta é a fórmula adotada no

Teorema 8.9. *(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo com x par se e somente se existem números naturais $a > b > 0$ de paridade oposta e relativamente primos tais que*

$$(x, y, z) = (2ab,\ a^2 - b^2,\ a^2 + b^2).$$

Demonstração. Seja (x, y, z) um terno pitagórico primitivo com x par. Em virtude do Lema 8.8 y é ímpar. De $x^2 + y^2 = z^2$ temos z ímpar, $z > y$ e $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$. Notemos que $z + y$ e $z - y$ são pares, portanto podemos considerar os números naturais $a_1 = (z+y)/2$ e $b_1 = (z-y)/2$. Temos $(x/2)^2 = a_1 b_1$. Afirmamos que $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$. De fato, se existe um primo p divisor de a_1 e b_1, então p divide $a_1 + b_1 = z$ e $a_1 - b_1 = y$. Da relação $x^2 + y^2 = z^2$ segue que p divide x, o que não é possível, pois (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo. Portanto $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$. Aplicando o resultado do Teorema 7.11 (página 170) sabemos que nestas condições a_1 e b_1 são quadrados perfeitos. Sejam a e b números naturais tais que $a_1 = a^2$ e $b_1 = b^2$. Temos $(x, y, z) = (2ab,\ a^2 - b^2,\ a^2 + b^2)$ e é claro que $a > b > 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. Ainda, se a e b tivessem a mesma paridade, x, y e z seriam pares, contrariando o fato de que (x, y, z) é primitivo. Portanto a e b têm paridade oposta, e terminamos a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente sejam $a > b$ números naturais de paridade oposta e relativamente primos. Seja $(x, y, z) = (2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$. É claro que x é par e y é ímpar. Ainda (x, y, z) é um terno pitagórico pois $x^2 + y^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = z^2$. Falta mostrar que (x, y, z) é primitivo. Suponhamos que exista p primo divisor de x, y e z. Como y é ímpar temos $p \neq 2$. Ainda p divide $y + z = 2a^2$, portanto p divide a, e p divide $z - y = 2b^2$, logo p divide b. Mas isto não é possível, pois a e b são relativamente primos. Portanto não existe primo divisor de x, y e z, e $\mathrm{mdc}(x, y, z) = 1$. □

Corolário 8.10. *Todos os ternos pitagóricos (x, y, z) são dados, sem repetição, pela fórmula*

$$(x, y, z) = (2abt,\ (a^2 - b^2)t,\ (a^2 + b^2)t)$$

(trocando x por y se necessário) sendo $a > b > 0$ números naturais de paridade oposta e relativamente primos, e t qualquer número natural positivo.

Demonstração. Se $a > b > 0$ e $t > 0$ são números naturais e se x, y e z são dados por $x = 2abt$, $y = (a^2 - b^2)t$ e $z = (a^2 + b^2)t$, é fácil verificar que $x^2 + y^2 = z^2$, e portanto (x, y, z) é um terno pitagórico. Reciprocamente, dado um terno pitagórico (x, y, z), seja $t = \mathrm{mdc}(x, y, z)$. Então $(x/t, y/t, z/t)$ é um terno pitagórico primitivo. Trocando x por y se necessário, podemos supor que x/t é par e y/t, ímpar. O Teorema 8.9 garante que existem números naturais $a > b > 0$ de paridade oposta e relativamente primos tais que $x/t = 2ab$, $y/t = a^2 - b^2$ e $z/t = a^2 + b^2$. Portanto $(x, y, z) = (2abt, (a^2 - b^2)t, (a^2 + b^2)t)$ tem a forma requerida.

Para terminar a demonstração falta provar que a fórmula dada fornece ternos pitagóricos sem repetição. Esta observação é atribuída em [26], página 169, a Leopold Kronecker. Sejam $(x, y, z) = (2abt, (a^2 - b^2)t, (a^2 + b^2)t)$ e $(x, y, z) = (2a_1b_1t_1, (a_1^2 - b_1^2)t_1, (a_1^2 + b_1^2)t_1)$ com as condições do enunciado do Corolário. Queremos demonstrar que $a = a_1$, $b = b_1$ e $t = t_1$. Começamos observando que $t = \mathrm{mdc}(x, y, z)$. De fato, t é um divisor comum de x, y e z. Como a e b são relativamente primos, $a^2 - b^2$ e $a^2 + b^2$ são relativamente primos, portanto t é o maior divisor comum de y e z, e assim t é o maior divisor comum de x, y e z. Da mesma forma $t_1 = \mathrm{mdc}(x, y, z)$, o que implica $t = t_1$. Como $y + z = (a^2 - b^2)t + (a^2 + b^2)t = 2a^2t$ e $y + z = (a_1^2 - b_1^2)t + (a_1^2 + b_1^2)t = 2a_1^2t$, segue que $2a^2t = 2a_1^2t$ o que implica $a = a_1$. Temos também $b = b_1$, o que termina a demonstração. □

8.5 Problemas

Problema 8.5.1. Obtenha exemplos de ternos pitagóricos primitivos usando a fórmula do Teorema 8.9.

Problema 8.5.2. Obtenha todos os ternos pitagóricos em que um dos números é 16.

Problema 8.5.3. Demonstre que se x, y e z são números naturais tais que $x^2 + y^2 = z^2$ então x ou y é múltiplo de 3 e xy é múltiplo de 6.

Problema 8.5.4. Demonstre que se x, y e z são números naturais tais que $x^2 + y^2 = z^2$ então 5 divide um dos números x, y ou z.

Problema 8.5.5. Dado um número natural c, prove que existem números naturais a e b tais que $a^2 - b^2 = c$ se e somente se existem números naturais m e n, de mesma paridade, tais que $c = mn$.

8.6 Pierre de Fermat e seu último teorema

Pierre de Fermat nasceu na França, provavelmente em 1601, e era advogado e conselheiro do Parlamento de Toulouse. Matemático amador nas horas vagas, distinguiu-se por importantes contribuições principalmente em Teoria dos Números. Fermat publicava muito pouco e suas descobertas eram conhecidas graças à sua correspondência com outros estudiosos, um costume da época. Durante um certo tempo Fermat estudou a versão latina do livro *Arithmetica*, escrito pelo matemático grego Diofanto de Alexandria no Século III. Nas margens desse livro Fermat fazia anotações inspiradas nos estudos de Diofanto, enunciando teoremas sem apresentar demonstrações. Fermat faleceu em 1665, e após sua morte essas anotações foram publicadas por um de seus filhos. Os teoremas propostos por Fermat foram demonstrados por matemáticos que viveram logo após ele, particularmente por Euler, no Século XVIII. Entretanto um desses teoremas enunciados por Fermat resistiu às tentativas de demonstração por aproximadamente 350 anos. Ficou conhecido como o *Último Teorema de Fermat*.

Às margens de seu exemplar de *Arithmetica*, e ao lado de um estudo de Diofanto sobre os ternos pitagóricos, escreveu Fermat as palavras que se tornariam famosas: *Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência em duas quartas potências, e em geral uma potência acima da quadrada em duas do mesmo tipo, é impossível: encontrei uma demonstração maravilhosa deste fato. Esta margem é muito pequena para contê-la.*[2]

Em outros termos, Fermat enunciou o seguinte

Teorema 8.11. *Para todo número natural $n \geq 3$ não existe solução para a equação*

$$x^n + y^n = z^n, \quad \text{com } x, y, z \text{ naturais positivos.} \tag{8.4}$$

A demonstração deste resultado é bastante complicada e utiliza técnicas algébricas avançadas. Nestes três séculos e meio inúmeros matemáticos contribuíram com idéias e técnicas, quando foi finalmente finalizado por Andrew Wiles em 1994. Quanto à demonstração anunciada por Fermat, a maioria dos historiadores, senão todos, acreditam que ele se enganou.

8.7 Problemas adicionais

Problema 8.7.1. Vimos no Problema 6.6.4 que se 3 divide $a^2 + b^2$ então 3 divide a e b, quaisquer que sejam os números naturais a e b. Use isso para provar que se (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo então 3 não é divisor de z.

Problema 8.7.2. Demonstre que, quaisquer que sejam os números naturais a e b, a^2+b^2 nunca é da forma $4k + 3$, para qualquer número natural k. Use isso para provar que se (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo então z é da forma $4k + 1$, para algum número natural k.

Problema 8.7.3. Seja n um número natural ímpar. Prove que n é composto se e somente se a equação

$$x^2 - y^2 = n, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

tem mais de uma solução.

[2]Tradução livre do original em latim, [2], página 40.

Problema 8.7.4. Complete os detalhes desta demonstração do Teorema 8.9, atribuída a L. Euler ([26], página 167). Seja (x, y, z) um terno pitagórico primitivo, com x par. Seja $\frac{z-y}{x} = \frac{b}{a}$, com $a > b > 0$ relativamente primos. Substituindo $z = y + x\frac{b}{a}$ em $z^2 = x^2 + y^2$ vem $2aby = (a^2 - b^2)x$. Então a e b têm paridade oposta e $2ab$ e $a^2 - b^2$ são relativamente primos. Portanto $2ab$ é divisor de x e $a^2 - b^2$ é divisor de y. Sejam $x = 2abl$ e $y = (a^2 - b^2)k$. Segue $l = k$ e $z = (a^2 + b^2)l$. Como $\text{mdc}(x, y, z) = 1$ vem $l = 1$.

8.8 Tema para investigação

Tema 8.8.1. Um triângulo cujos lados são números naturais e cuja área é também um número natural chama-se *triângulo heroniano*, em homenagem a Heron de Alexandria, matemático grego que viveu no primeiro século de nossa era. Chamamos de *triângulo pitagórico* a todo triângulo retângulo cujos lados são números naturais. **a)** Demonstre que todo triângulo pitagórico é heroniano. **b)** Dê exemplos de triângulos heronianos que não são pitagóricos. **c)** Verifique se existem infinitos triângulos heronianos não pitagóricos.

Parte III

Introdução à teoria dos números inteiros

Capítulo 9

Os números inteiros

9.1 Introdução

Vimos, no Capítulo 1, que o homem, usando sua capacidade de abstração, constrói o conceito de número natural, visando, inicialmente, a contagem de objetos discretos. Obtém dessa forma os números 1, $1+1$, $1+1+1$, ... No Capítulo 4, seção 4.5, introduzimos o conceito de zero como número natural, e definimos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

No presente capítulo estudamos os números inteiros como uma extensão desse conjunto.

9.2 A qualidade dos números negativos

Todo número natural tem um aspecto quantitativo, pois mede a quantidade de elementos de um conjunto. Mas esse número também traz uma idéia qualitativa, que é a positividade. Assim, ao dizer "5 livros", traduzimos uma afirmação positiva sobre essa específica quantidade de livros. Mas a experiência nos leva à necessidade de considerar números naturais com a qualidade de negativo. Podemos fazer isso com uma construção do tipo "faltam-me 5 livros", ou então "a temperatura está 8 graus abaixo de zero". A Álgebra também apresenta situações em que se faz necessário considerar os números naturais com a qualidade de negatividade. Por exemplo, ao procurar uma possível solução x da equação $7+x=3$, vemos que nenhum número natural pode exercer esse papel. Percebemos que o valor quantitativo de x deve ser 4, mas x deve agir na operação $7+x$ de forma oposta à adição usual. É necessário que $+x$ opere retirando quatro unidades de 7, para resultar 3.

Essas observações nos trazem a ideia de considerar, para cada número natural $n \neq 0$, um outro número, quantitativamente igual a n mas de qualidade oposta. Chamaremos de *negativos* a esses números.

Convém criar uma notação para esse novo número, por exemplo, $\tilde{n}$. Vemos que $\tilde{n}$ deve ser caracterizado pelas relações

$$n + \tilde{n} = 0 = \tilde{n} + n \tag{9.1}$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, com a construção desses números, poderemos dizer que a solução da equação $7+x=3$ dada acima passaria a ser $x=\tilde{4}$, pois $7+\tilde{4} = 3+4+\tilde{4} = 3+0 = 3$.

O estudante bem sabe que a Matemática consagrou a notação $-n$ para o número negativo correspondente a n. Diremos que $-n$ é o *oposto* de n.

Existem razões práticas para a escolha da notação $-n$ para o oposto de n. Ela simplifica a manipulação de expressões algébricas, combinando a notação de subtração com a de oposto. Por exemplo, a adição de 8 com -5, a ser representada por $8 + (-5)$, poderá ser simplificada para $8-5$, pois ambas as expressões têm o mesmo significado: estão sendo retiradas 5 unidades de 8.

Observamos que a consideração dos números negativos não constituem uma mera substituição da subtração. No contexto dos números naturais a subtração $a - b$ só tem sentido quando $a \geq b$. No novo contexto, com o acréscimo dos números negativos, poderemos processar a subtração $a - b$ quaisquer que sejam o números naturais a e b. Se $b > a$ o valor de $a - b$ será um desses números negativos, mais exatamente, o oposto de $b - a$.

Poderíamos continuar a construção dos números inteiros usando os métodos com os quais os professores os ensinam para os estudantes da escola básica. Mas neste curso, como já estamos em uma fase mais adiantada em nosso caminho para a álgebra abstrata, preferimos proceder com um grau maior de formalidade. É o que faremos na seção seguinte.

9.3 O conjunto dos números inteiros

Dado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, para todo número natural $n \neq 0$ consideramos o símbolo $-n$. Definimos

Definição 9.1. O *conjunto dos números inteiros* é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{9.2}$$

Em outros termos, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\ldots - 3, -2, -1\}$. Conforme já mencionamos, para todo número natural $n \neq 0$ o número $-n$ é denominado *oposto* de n. O elementos do conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ serão denominados *inteiros positivos*, e os do conjunto $\mathbb{Z}_- = \{\ldots -3, -2, -1\}$, *inteiros negativos*.

Obtivemos assim um novo conjunto de números que inclui os números naturais. Esperamos que esse novo conjunto tenha maiores possibilidades do que o antigo conjunto $\mathbb{N}$.

Nossa primeira providência é estender para $\mathbb{Z}$ os conceitos de adição e multiplicação já definidos em $\mathbb{N}$. A subtração também é definida mais abaixo, e a divisão será estudada na Seção 9.7.

A adição e a multiplicação de inteiros podem ser definidas pela lista de condições apresentadas a seguir, levando-se em conta que já estão definidas para números naturais. O símbolo -0 pode eventualmente aparecer. Nesse caso entendemos que $-0 = 0$.

Definição 9.2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq n$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Definimos:

(i) $m + (-n) = (-n) + m = k$;

(ii) $(-m) + n = n + (-m) = -k$;

(iii) $(-m) + (-n) = -(m + n) = (-n) + (-m)$;

(iv) $(-m)n = n(-m) = -(mn)$;

(v) $(-m)(-n) = mn = (-n)(-m)$.

O estudante está convidado a verificar que as condições (i), (ii) e (iii) definem a soma $a+b$ para os casos em que a ou b não são números naturais, e também que as condições (iv) e (v) definem o produto ab para os casos em que a ou b não são números naturais. Pode ser útil fazer alguns exemplos. Para ver o que é $4+(-7)$, escrevemos $m = 7$ e $n = 4$. Então $k = m - n = 7 - 4 = 3$. Usando a segunda identidade do item (ii) da Definição temos $4+(-7) = n+(-m) = -k = -3$.

As propriedades comutativa da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$ podem ser facilmente verificadas. Como exemplo vamos provar que $a+b = b+a$ para o caso em que a é positivo e b negativo. Seja $b = -t$, para t positivo. Se $a \geq t$ escrevemos $a = m$ e $t = n$. Usando a condição (i) acima vem $a+b = m+(-n) = (-n)+m = b+a$. Se $t > a$ escrevemos $t = m$ e $a = n$. Usando a condição (ii) acima vem $a+b = n+(-m) = (-m)+n = b+a$.

A propriedade associativa da adição em $\mathbb{Z}$ está praticamente verificada no Problema Resolvido 9.6 apresentado abaixo. O estudante está convidado a verificar a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$, assim como a distributiva.

O símbolo $-n$ foi definido para o caso em que n é um número natural. Completamos nossa definição escrevendo $-(-n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que o símbolo $-n$ agora fica definido também para o caso em que n é inteiro negativo. Nesse caso dizemos que $-n$ tem n como oposto.

Valem as relações

$$a+(-a) = 0 = (-a)+a \tag{9.3}$$

para todo número inteiro $a \in \mathbb{Z}$.

A relação de ordem natural já considerada em $\mathbb{N}$ pode se estender para $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

Definição 9.3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, escrevemos $a < b$ quando $b+(-a) \in \mathbb{Z}_+$.

Os símbolos $>$ $\leq$ $\geq$ são definidos de modo análogo ao que foi feito na Seção 3.4, página 63.

Nos Problemas 9.4 solicitamos do estudante a demonstração de várias propriedades relacionadas com a ordem em $\mathbb{Z}$.

A seguir definimos a operação de subtração em $\mathbb{Z}$:

Definição 9.4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, a *diferença* $a-b$ é definida por $a-b = a+(-b)$.

Todo $n \in \mathbb{Z}$ e seu oposto $-n$ têm o mesmo valor quantitativo. A esse valor comum denominamos *valor absoluto*. Mais exatamente, temos a

Definição 9.5. Dado $m \in \mathbb{Z}$, seu *valor absoluto* é anotado por $|m|$ e definido por

$$|m| = \begin{cases} m & \text{se } m \geq 0 \\ -m & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Problema resolvido 9.6. Demonstre a propriedade associativa da adição em $\mathbb{Z}$. Isto é, $(a+b)+c = a+(b+c)$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Solução. Vamos examinar oito casos, conforme cada um dos números a, b ou c esteja ou não em $\mathbb{N}$.

1º caso Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ já temos $(a+b)+c = a+(b+c)$, conforme foi observado na Seção .

2º caso Suponhamos $a, b \in \mathbb{N}$ mas $c \notin \mathbb{N}$. Seja $c = -t$, com $t \in \mathbb{N}$. Temos duas possibilidades: $b \geq t$ ou $b < t$. Se $b \geq t$ escrevemos $b = t + k$. Temos também $a + b \geq t$ e $a + b = t + a + k$. Portanto

$$a + (b + c) = a + [b + (-t)] = a + k$$

e

$$(a + b) + c = (a + b) + (-t) = a + k$$

em virtude do item (i) de 9.2. Portanto $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Suponhamos agora que $b < t$. Escrevemos $t = b + k$. Então

$$a + (b + c) = a + [b + (-t)] = a + (-k)$$

em virtude do item (ii) de 9.2. Comparando $a + b$ com t temos dois subcasos. Suponhamos $a + b < t$. Seja $t = a + b + l$. Juntando isso com $t = b + k$ vem $a + l = k$ (em $\mathbb{N}$ vale a Lei do Cancelamento da adição). Em virtude dos itens (i) e (ii) de 9.2 vem

$$a + (-k) = -l \quad \text{e} \quad (a + b) + c = (a + b) + (-t) = -l.$$

Considerando que $a + (b + c) = a + (-k)$ segue $(a + b) + c = a + (b + c)$. Suponhamos agora $a + b \geq t$. Seja $a + b = t + l$. Juntando isso com $t = b + k$ vem $a = k + l$. Portanto

$$a + (-k) = l \quad \text{e} \quad (a + b) + c = (a + b) + (-t) = l.$$

Segue $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3º caso Suponhamos $a \in \mathbb{N}$ mas $b, c \notin \mathbb{N}$.

A demonstração é análoga à do 2º caso.

4º caso Suponhamos $a, b, c \notin \mathbb{N}$.

Sejam $a = -u$, $b = -s$ e $c = -t$. Aplicando o item (iii) de 9.2 temos $(a + b) + c = [(-u) + (-s)] + (-t) = -(u + s) + (-t) = -[(u + s) + t] = -[u + (s + t)] = (-u) + [-(s + t)] = (-u) + [(-s) + (-t)] = a + (b + c)$.

5º caso Suponhamos $a, b \notin \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$.

Aplicando a propriedade comutativa vemos que a identidade a ser provada $(a + b) + c = a + (b + c)$ equivale a $c + (b + a) = (c + b) + a$. Esta última foi considerada no 3º caso.

6º caso Suponhamos $a \notin \mathbb{N}$ e $b, c \in \mathbb{N}$.

Temos $(a + b) + c = a + (b + c) \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c \Rightarrow (c + b) + a = c + (b + a)$. Esta última foi provada no 2º caso.

7º caso Suponhamos $a, c \notin \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$.

Aplicando a propriedade comutativa e o 3º caso vem $(a + b) + c = (b + a) + c = b + (a + c) = b + (c + a) = (b + c) + a = a + (b + c)$.

8º caso Suponhamos $b \notin \mathbb{N}$ e $a, c \in \mathbb{N}$.

Aplicando a propriedade comutativa e o 2º caso vem $(a + b) + c = c + (a + b) = (c + a) + b = (a + c) + b = a + (c + b) = a + (b + c)$. □

9.4 Problemas

Problema 9.4.1. Verifique que as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 9.2 definem a soma $a+b$ para os casos em que a ou b são números inteiros negativos. Verifique ainda que as condições (iv) e (v) da mesma Definição definem o produto ab para os casos em que a ou b são números inteiros negativos.

Problema 9.4.2. Use a Definição 9.2 para verificar as relações (9.3).

Problema 9.4.3. Demonstre o 3º caso do Problema Resolvido 9.6.

Problema 9.4.4. Demonstre a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$. Isto é, $(ab)c = a(bc)$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Problema 9.4.5. Demonstre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{Z}$. Isto é, $a(b+c) = ab + ac$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Problema 9.4.6. No Teorema 4.5 vimos a Lei de Integridade, isto é, se a e b são números naturais tais que $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Estenda a validade dessa lei para $\mathbb{Z}$.

Problema 9.4.7. **a)** Demonstre que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tem $a+0 = a = 0+a$. Por causa dessa propriedade 0 chama-se *elemento neutro da adição*. Prove que o elemento neutro da adição é único. Isto é, dado $a \in \mathbb{Z}$, se $b \in \mathbb{Z}$ é tal que $a + b = a$ então $b = 0$. **b)** Demonstre que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tem $0a = 0 = a0$. **c)** Demonstre que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tem $1a = a = a1$. Por causa dessa propriedade 1 chama-se *elemento neutro da multiplicação*. Prove que o elemento neutro da multiplicação é único para todo $a \neq 0$.

Problema 9.4.8. **a)** Demonstre que $a < b \Rightarrow -b < -a$ quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. **b)** Demonstre a transitividade da relação de ordem. Isto é, $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Problema 9.4.9. Demonstre a Lei da Tricotomia em $\mathbb{Z}$. Isto é, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, exatamente uma das seguintes condições é verificada: $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.

Problema 9.4.10. Demonstre as seguintes leis de compatibilidade e de cancelamento. **a)** $a < b \iff a + c < b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **b)** $a = b \iff a + c = b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **c)** $a < b \iff ac < bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c > 0$. **d)** $a < b \iff bc < ac$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c < 0$. **e)** $a = b \iff ac = bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c \neq 0$.

Problema 9.4.11. Quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, temos: **a)** $|m| \geq 0$. **b)** $|m| = 0 \iff m = 0$. **c)** $|-m| = |m|$. **d)** $|mn| = |m||n|$. **e)** $|m \pm n| \leq |m| + |n|$. **f)** $|m| \leq n \iff -n \leq m \leq n$.

9.5 Princípios fundamentais

Vimos nos capítulos 1 e 4 que os números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ foram construídos obedecendo a alguns princípios fundamentais, que sintetizamos a seguir:

P1 Todo número natural n tem um sucessor e esse sucessor é único.

P2 Todo número natural $n \neq 0$ tem um antecessor e esse antecessor é único. O número 0 não tem antecessor em $\mathbb{N}$.

P3 Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então o sucessor de n também está em S. Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

Estas são as propriedades assumidas na construção psicológica dos números naturais. Existe uma formulação mais técnica dessas propriedades, denominadas *axiomas de Peano*, em homenagem ao matemático Giuseppe Peano, que as publicou em 1889.

Dentre os princípios acima desejamos destacar o terceiro da seguinte forma:

Princípio de Indução Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então $n + 1 \in S$. Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

Vimos na Seção 3.4 o

Princípio do Menor Número Natural Se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento.

Isto significa que existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$. O Princípio de Indução e o Princípio do Menor Número Natural são equivalentes, o que é observado nos Problemas 9.6.1 e 9.6.2.

Vamos estender o Princípio do Menor Número Natural para subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Começamos com algumas definições. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Z}$, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos m de *limitante inferior*. Por outro lado, A se diz *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos M de *limitante superior*. Dizemos que A tem *máximo* se existir $M \in A$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Teorema 9.7. *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente tem mínimo. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado superiormente tem máximo.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{Z}$ com $A \neq \emptyset$ e limitado inferiormente. Seja m um limitante inferior de A. Consideremos o conjunto $A - m = \{a - m \mid a \in A\}$. Vemos que $A - m \subset \mathbb{N}$ e $A - m \neq \emptyset$, portanto, em virtude do Princípio do Menor Número Natural, $A - m$ tem mínimo, digamos, l. Como $l \in A - m$, existe $m_0 \in A$ tal que $l = m_0 - m$. Então, para todo $a \in A$, temos $l \leq a - m$ $\Rightarrow m_0 - m \leq a - m \Rightarrow m_0 \leq a$. Portanto, m_0 é mínimo de A.

Por outro lado, seja $A \subset \mathbb{Z}$ com $A \neq \emptyset$ e limitado superiormente. Consideremos o conjunto $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Vemos que $-A$ é limitado inferiormente, portanto tem mínimo. O oposto desse mínimo é máximo de A. □

9.6 Problemas

Problema 9.6.1. Demonstre que o Princípio do Menor Número Natural implica no Princípio de Indução.

Problema 9.6.2. Estude a seguinte demonstração de que o Princípio de Indução implica no Princípio do Menor Número Natural. Seja S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Seja M o conjunto dos números naturais m tais que $m \leq s$ para todo s em S. Então $0 \in M$ e se $s \in S$ então $s + 1 \notin M$. Portanto $M \neq \mathbb{N}$ e pelo princípio da indução existe um número natural l tal

que $l+1 \notin M$. Afirmamos que l é o mínimo de S. De fato, como $l \in M$ então $l \leq s$ para todo $s \in S$, por definição de M. Ainda, se $l \notin S$ então $l < s$ para todo $s \in S$, e $l+1 \leq s$ para todo $s \in S$, contradizendo que $l+1 \notin M$. Segue que $l \in S$.

9.7 Teoria dos números inteiros

Nesta seção estendemos para o conjunto $\mathbb{Z}$ os conceitos da Teoria dos Números Naturais estudados nos capítulos 4 e 5. Vamos adaptar para $\mathbb{Z}$ o algoritmo da divisão e os resultados sobre divisibilidade, mdc, mmc, classes módulo m e números primos.

Teorema 9.8 (Algoritmo da Divisão)**.** *Dados números inteiros a e $b \neq 0$, existe e é único o par de números inteiros q e r tal que*

$$a = bq + r, \quad \textit{com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração. Primeiro estabelecemos a existência de q e r. Suponhamos inicialmente $b > 0$. Notemos que o conjunto

$$A = \{a - nb \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } a - nb \geq 0\}$$

é não vazio. De fato, tomando $n = -|a|$ temos $a - nb = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0$ pois $b \geq 1$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$, aplicando o Princípio do Menor Número Natural vemos que A tem mínimo. Seja r esse mínimo. Como $r \in A$ temos $r \geq 0$ e existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - qb$, ou $a = qb + r$. Por outro lado, como $a - (q+1)b < a - qb$ e $a - qb = r$ é o mínimo de A, então $a - (q+1)b < 0 \Rightarrow r < b$ $\Rightarrow r < |b|$.

Suponhamos agora $b < 0$. Então $-b > 0$, e o resultado acima diz que existem inteiros q' e r tais que $a = (-b)q' + r$, com $0 \leq r < -b$. Como $-b = |b|$ temos $0 \leq r < |b|$. Pondo $q = -q'$ temos $a = bq + r$. Isto estabelece a existência de q e r.

Vejamos a unicidade. Sejam q e r números inteiros tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$, e sejam p e s números inteiros tais que $a = bp + s$ e $0 \leq s < |b|$. Subtraindo membro a membro essas identidades vem $s - r = b(q - p) \Rightarrow |s - r| = |b||q - p|$. Como $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq s < |b|$ temos $|s - r| < |b| \Rightarrow |b||q - p| < |b| \Rightarrow 0 \leq |q - p| < 1 \Rightarrow |q - p| = 0$. Segue que $q = p$. De $s - r = b(q - p)$ obtemos $s - r = 0 \Rightarrow s = r$. Fica demonstrada a unicidade do par q e r. □

Dados números inteiros a e $b \neq 0$, os números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$ são denominados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão euclidiana de a por b.

Agora adaptamos a Definição 4.18 da página 107:

Definição 9.9. Um número inteiro a se diz *múltiplo* de um número inteiro b se existir um número inteiro q tal que $a = bq$. Nesse caso, e se $b \neq 0$, dizemos também que b *divide* a ou que b é *divisor* ou *fator* de a.

Se a e $b \neq 0$ são inteiros tais que $a = bq$ para algum número inteiro q, anotamos $b \mid a$. Por outro lado, se não existir tal inteiro q, anotamos $b \nmid a$. Observe que, de acordo com o Teorema do Algoritmo da Divisão, existem inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$. Dessa forma, se $r = 0$ temos $b \mid a$, e se $r > 0$, temos $b \nmid a$.

Apresentamos a seguir uma coletânea de propriedades derivadas do conceito de divisibilidade. O nosso estudante certamente já trabalhou com a maioria delas. No que segue a, b, c, d, m e n são inteiros quaisquer. Sempre que se escrever $a \mid b$ se entende que $a \neq 0$.

1. $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$;

2. $a \mid b \iff -a \mid b \iff a \mid -b \iff -a \mid -b$;

3. $a \mid 1 \iff a = \pm 1$;

4. $a \mid b$ e $a \mid c \Rightarrow a \mid mb + nc$;

5. $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$;

6. $a \mid b$ e $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$;

7. $a \mid b$ e $b \mid a \iff a = \pm b$;

8. $a \mid b$ e $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$.

A Propriedade 2 pode ser reescrita da seguinte forma: $a \mid b \iff |a| \mid |b|$. A Propriedade 4, por sua vez, se generaliza da seguinte forma: se b_i e n_i são inteiros para $1 \leq i \leq t$ e se $a \mid b_i$ para todo i, então $a \mid (n_1 b_1 + \cdots + n_t b_t)$.

A seguir adaptamos para $\mathbb{Z}$ a definição de mdc já estudada em 5.10. Dado um número inteiro a, indicamos por $\mathcal{D}(a)$ o conjunto dos números inteiros divisores de a. Observamos que 1 está em $\mathcal{D}(a)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}$, e que se $a \neq 0$ então $\mathcal{D}(a)$ é finito. Portanto, dados números inteiros a e b não simultaneamente nulos o conjunto $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ é não vazio e finito. Segue que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ tem um elemento máximo. Isto justifica a seguinte definição.

Definição 9.10. Dados números inteiros a e b não simultaneamente nulos o elemento máximo do conjunto $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ chama-se *máximo divisor comum* de a e b, e é indicado por $\mathrm{mdc}(a, b)$. Se $a = 0$ e $b = 0$ convém definir $\mathrm{mdc}(0, 0) = 0$.

As mesmas observações se aplicam para três ou mais números inteiros a_1, a_2, ..., a_n, e da mesma forma se define $\mathrm{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Das considerações acima podemos ver que, dados inteiros a e b, o valor de $\mathrm{mdc}(a, b)$ depende apenas dos divisores positivos de a e b. Portanto $\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(|a|, |b|)$. Dessa forma, as propriedades do mdc vistas nas seções 5.10 e 7.2 se estendem naturalmente de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, com as devidas adaptações. Por exemplo, a identidade $\mathrm{mdc}(ta, tb) = t\,\mathrm{mdc}(a, b)$ do Teorema 7.2 tem em $\mathbb{Z}$ a forma $\mathrm{mdc}(ta, tb) = |t|\,\mathrm{mdc}(a, b)$ quaisquer que sejam os inteiros a, b e t.

O mesmo ocorre com o mmc. Dados inteiros a e b, definimos $\mathrm{mmc}(a, b)$ como o menor dentre os múltiplos comuns positivos de a e b. Portanto $\mathrm{mmc}(a, b) = \mathrm{mmc}(|a|, |b|)$.

Existe, entretanto, uma propriedade adicional do mdc que necessitamos estudar, pois a utilizaremos no Capítulo 11. Começaremos com um exemplo, considerando $a = 1365$ e $b = 231$. No Problema Resolvido 5.18 já vimos que $\mathrm{mdc}(1365, 231) = 21$. Estamos interessados em saber o que são as combinações lineares $1365n + 231m$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Fazendo alguns cálculos constatamos que $2 \cdot 1365 - 12 \cdot 231 = -42$, $1 \cdot 1365 - 6 \cdot 231 = -21$, $11 \cdot 1365 - 65 \cdot 231 = 0$, $10 \cdot 1365 - 59 \cdot 231 = 21$, $9 \cdot 1365 - 53 \cdot 231 = 42$, e assim por diante, observamos que

$$A = \{1365n + 231m \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -42, -21, 0, 21, 42, \ldots\}$$

é o conjunto dos múltiplos de $\mathrm{mdc}(1365, 231) = 21$. Isto nos sugere o

Teorema 9.11. *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então o conjunto das combinações lineares de a e b, definido por*

$$A = \{an + bm \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

coincide com o conjunto dos múltiplos de $\mathrm{mdc}(a, b)$.

Demonstração. Notemos inicialmente que se $a = 0$ e $b = 0$ então $A = \{0\}$ e $\text{mdc}(0, 0) = 0$, portanto o resultado vale neste caso. Suponhamos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Consideremos o conjunto

$$A_+ = \{an + bm \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } an + bm > 0\}$$

Podemos ver que $A_+ \neq \emptyset$. Se $a \neq 0$ então $a \cdot 1 + b \cdot 0 \in A_+$ ou $-a \cdot 1 + b \cdot 0 \in A_+$. Se $a = 0$ então $b \neq 0$, e $b \in A_+$ ou $-b \in A_+$. Como $A_+ \subset \mathbb{N}$, aplicando o Princípio do Menor Número Natural, consideramos o mínimo d de A_+. Vamos provar que $d = \text{mdc}(a, b)$.

Notemos primeiro que $d > 0$ e que existem inteiros n_0 e m_0 tais que $d = an_0 + bm_0$, já que $d \in A_+$. Portanto, se t é um divisor comum de a e b então $t \mid an_0 + bm_0 \Rightarrow t \mid d$. Portanto $t \leq d$. Por outro lado, se $a = qd + r$, com q e r inteiros tais que $0 \leq r < d$, temos $r = 0$. De fato, $r = a - qd = a - q(an_0 + bm_0) = a(1 - qn_0) + b(-qm_0)$. Logo r é uma combinação linear de a e b. Mas $0 \leq r < d$. Como d é o mínimo de A_+ temos que ter $r \notin A_+ \Rightarrow r = 0$. Isto implica que $d \mid a$. Da mesma forma se demonstra que $d \mid b$.

Em resumo, d é um divisor comum de a e b e é maior do que ou igual a qualquer outro divisor comum. Concluímos que $d = \text{mdc}(a, b)$.

Para terminar a demonstração do Teorema e provar que A coincide com o conjunto dos múltiplos de d, basta observar o seguinte. Todo $an + bm \in A$ é múltiplo de d, pois $d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow d \mid an + bm$. Por outro lado, se t é múltiplo de d, escrevemos $t = qd$ para algum inteiro q, e $t = q(an_0 + bm_0) = a(qn_0) + b(qm_0) \in A$. □

Do que foi estudado acima destacamos o seguinte resultado:

Escólio 9.12. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ existem inteiros m e n tais que* $\text{mdc}(a, b) = an + bm$.

A definição de inteiros relativamente primos é análoga à de naturais relativamente primos.

Definição 9.13. Os números inteiros a e b chamam-se *relativamente primos* se $\text{mdc}(a, b) = 1$. Neste caso a e b também são denominados *primos entre si* ou *coprimos*. Da mesma forma, se os números inteiros a_1, a_2, ..., a_n são tais que $\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, dizemos que são relativamente primos (ou primos entre si, ou ainda coprimos).

Uma consequência imediata do Escólio 9.12 é

Corolário 9.14. *Sejam a e b inteiros. Então a e b são relativamente primos se e somente se existem inteiros m e n tais que $an + bm = 1$.*

Problema resolvido 9.15. Calcule inteiros m e n tais que $\text{mdc}(-1071, 85) = n(-1071) + m85$.

Solução. Para calcular $\text{mdc}(-1071, 85)$ podemos considerar $\text{mdc}(1071, 85)$, pois os dois valores são iguais. Efetuamos as divisões sucessivas:

$$\begin{aligned} 1071 &= 12 \cdot 85 + 51 \\ 85 &= 1 \cdot 51 + 34 \\ 51 &= 1 \cdot 34 + 17 \\ 34 &= 2 \cdot 17 + 0 \end{aligned}$$

Vemos que o último resto não nulo é 17, portanto $\text{mdc}(-1071, 85) = 17$.

Para obter os inteiros m e n usamos as relações acima, iniciando com a penúltima: $17 = 51 - 1\cdot 34 = 51 - 1(85 - 1\cdot 51) = 51 - 1\cdot 85 + 51 = 2\cdot 51 - 1\cdot 85 = 2(1071 - 12\cdot 85) - 1\cdot 85 = 2\cdot 1071 - 24\cdot 85 - 1\cdot 85 = 2\cdot 1071 - 25\cdot 85$. Portanto $\text{mdc}(-1071, 85) = (-2)(-1071) + (-25)85$. Portanto podemos tomar $n = -2$ e $m = -25$. □

Problema resolvido 9.16. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, calcule $\text{mdc}(4k + 3, 5k + 4)$.

Solução. O estudante pode verificar que em $\mathbb{Z}$ vale o resultado: "Se a, b, q e r são números inteiros tais que $a = bq + r$, então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$". No contexto dos números naturais isso corresponde ao Teorema 5.15, demonstrado na página 141.

Como $5k + 4 = 1 \cdot (4k + 3) + (k + 1)$ e $4k + 3 = 3 \cdot (k + 1) + k$ e $k + 1 = 1 \cdot k + 1$ vem $\text{mdc}(5k + 4, 4k + 3) = \text{mdc}(4k + 3, k + 1) = \text{mdc}(k + 1, k) = \text{mdc}(1, k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Na Seção 4.7, página 99, estudamos o conceito de classes módulo n, definidas em $\mathbb{N}$. Esse conceito se estende para $\mathbb{Z}$ de acordo com a

Definição 9.17. Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Para cada inteiro r tal que $0 \leq r < n$, definimos o conjunto

$$A(n, r) = \{qn + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

denominado *classe módulo n determinada por r*.

Por exemplo, se $n = 2$, temos duas classes módulo 2, que são

$$A(2, 0) = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

e

$$A(2, 1) = \{2q + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots - 5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

denominadas, respectivamente, classe dos números pares e classe dos números ímpares.

Proposição 9.18. *Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Valem as seguintes propriedades:* ***a)*** *Existem n classes módulo n.* ***b)*** *Se $r \neq s$ são inteiros tais que $0 \leq r, s < n$, então as classes $A(n, r)$ e $A(n, s)$ são disjuntas.* ***c)*** *$\mathbb{Z}$ é a reunião das classes $A(n, r)$, com $0 \leq r < n$.*

Demonstração. **a)** As classes são $A(n, 0)$, $A(n, 1)$, ..., $A(n, n - 1)$. Para provar que são n conjuntos, basta provar que se r e s são inteiros tais que $0 \leq r < s < n$, então $A(n, r)$ e $A(n, s)$ são diferentes. Notemos que $r \in A(n, r)$ mas $r \notin A(n, s)$. De fato, $r \in A(n, r)$ porque $r = 0\cdot n + r \in A(n, r)$, por definição. Por outro lado, se ocorresse $r \in A(n, s)$ poderíamos escrever $r = qn + s$ para algum inteiro q. Mas então $n \mid s - r$, o que é impossível pois $0 < s - r < n$. Portanto $A(n, r)$ e $A(n, s)$ são diferentes. **b)** Com as notações acima, suponhamos que existisse $a \in A(n, r) \cap A(n, s)$. Então $a = qn + r$ e $a = tn + s$. Logo $qn + r = tn + s$, e novamente temos $n \mid s - r$, o que é impossível. Portanto $A(n, r)$ e $A(n, s)$ são disjuntos. **c)** De fato, dado $m \in \mathbb{Z}$, seja $m = qn + r$, para $0 \leq r < n$. Então $m \in A(n, r)$. □

As definições de inteiro primo e composto assim como suas propriedades se adaptam com poucas modificações em relação ao que já conhecemos dos números naturais.

Definição 9.19. Denominamos *primo* a todo número inteiro > 1 que não tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo. Chamamos de *composto* a todo número inteiro que tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo.

As propriedades dos primos estudadas anteriormente, particularmente as do Capítulo 7, se estendem para $\mathbb{Z}$ com as devidas adaptações. Por exemplo, o Corolário 7.4 passa a ter a seguinte redação: "Se p é primo e se p é divisor de ab então p é divisor de a ou de b, quaisquer que sejam os números inteiros a e b". Também vale que todo inteiro n diferente de -1, 0 ou 1 tem uma única decomposição como produto de primos, a menos da ordem dos fatores. De fato, se $n > 1$, já sabemos que isso vale. Se $n < -1$, basta tomar a decomposição em primos de $-n$ e colocar o sinal $-$. Por exemplo, $-12 = -2^2 \cdot 3$.

9.8 Problemas

Problema 9.8.1. Calcule inteiros m e n tais que $\text{mdc}(17290, -3553) = n17290 + m(-3553)$.

Problema 9.8.2. Encontre condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e b para que $\text{mdc}(a, b) = |a|$.

Problema 9.8.3. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, calcule: **a)** $\text{mdc}(2k + 1, 9k + 4)$; **b)** $\text{mdc}(2k - 1, 9k + 4)$.

Problema 9.8.4. Determinar todos os inteiros positivos x e y tais que $\text{mdc}(x, y) = 18$ e $\text{mmc}(x, y) = 72$.

Problema 9.8.5. Demonstre que se a, b e c são inteiros ímpares, então a equação $ax^2+bx+c = 0$ não tem raiz racional.

Problema 9.8.6. Determine o menor inteiro positivo m tal que $10125m$ é simultaneamente um quadrado perfeito e um número cúbico.

Problema 9.8.7. Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Se r e s são inteiros tais que $ar + bs = d$, o que pode ser $\text{mdc}(r, s)$?

9.9 Problemas adicionais

Problema 9.9.1. Sejam a e b inteiros. Se $\text{mdc}(a, b) = 8$, quais são os possíveis valores de $\text{mdc}(a^3, b^4)$?

Problema 9.9.2. Sejam a e b inteiros e p primo. Se $\text{mdc}(a, b) = p^3$, calcule $\text{mdc}(a^2, b^2)$.

Problema 9.9.3. Prove que dentre dez inteiros consecutivos quaisquer pelo menos um deles é relativamente primo com cada um dos outros.

9.10 Temas para investigação

Tema 9.10.1. No Problema 3.8.11 apresentado na página 83 vimos que para todo número natural n os dígitos das unidades das representações decimais de n e n^5 são iguais. Vamos aprofundar esse resultado.

Prove que os dígitos das unidades das representações decimais dos números naturais a e b são iguais se e somente se $10|a-b$. Demonstre que $10|n^5-n$ para todo número natural n usando agora o Pequeno Teorema de Fermat. Da mesma forma prove que $10|n^9-n$.

Encontre todos os números naturais k tais que para todo n os dígitos das unidades das representações decimais de n e n^k são iguais.

Tema 9.10.2. Esta é uma generalização parcial dos resultados do Tema 9.10.1 acima. Se p é primo, sabemos do Pequeno Teorema de Fermat que p divide a^p-a para todo número natural a.

Dado um primo p encontre todos os números naturais q para os quais é verdadeira a seguinte afirmação:

$$p \text{ divide } a^q - a \quad \text{para todo } a \in \mathbb{N}.$$

E se p não for primo?

Tema 9.10.3. Vimos no Tema 5.16.8 na página 154 o que são os números de Mersenne $M_p = 2^p-1$, com p primo. Vimos também que existe, desde o tempo dos antigos gregos, um interesse em determinar para quais primos p se tem M_p primo, pois esses primos entram na composição dos números perfeitos pares (confira página 174).

Para obter informações sobre a natureza dos números $M_p = 2^p-1$ podemos proceder indutivamente, e examinar a forma desses números para uma certa quantidade de valores de p. Se pudermos obter conjecturas que nos pareçam razoáveis, podemos em seguida estudar como demonstrá-las (ou eventualmente construir contra-exemplos). Vejamos a lista abaixo:

$2^2-1=3$
$2^3-1=7$
$2^5-1=31$
$2^7-1=127$
$2^{11}-1=23\cdot 89$
$2^{13}-1=8191$
$2^{17}-1=131071$
$2^{19}-1=524287$
$2^{23}-1=47\cdot 178481$

a) Examinando os exemplos acima tente obter um padrão de comportamento entre os números de Mersenne e os primos que fazem parte de sua decomposição canônica. Faça uma conjectura geral.
b) Se você fez a conjectura esperada então, admitindo que ela seja verdadeira, você poderá facilmente demonstrar a seguinte propriedade, denominada *critério de Fermat*: Sejam $p>2$ um primo e q um fator primo de $M_p = 2^p-1$. Então $q = 1+2sp$ para algum número natural $s>0$.
c) Usando o critério de Fermat verifique se $2^{37}-1$ é primo ou não, e no caso de não sê-lo, encontre um divisor >1 e $<2^{37}-1$.
d) Estude o alcance do método de Fermat, isto é, verifique se ele permite decidir a primaridade dos números de Mersenne com relativa facilidade mesmo para valores altos de p.
e) Investigue uma demonstração de sua conjectura feita acima.
f) Investigue como são os fatores primos de 2^n-1 quando n não é primo. Faça suas conjecturas. Alguma demonstração?

Tema 9.10.4. **a)** Vimos no Tema 9.10.3 acima conjecturas e resultados sobre os fatores primos de 2^n-1. Faça o mesmo para 3^n-1. Obtenha uma possível forma geral dos divisores primos

de $3^p - 1$, para p primo. Veja se é possível usar isto para encontrar um divisor primo ímpar de $3^{31} - 1$. E quanto aos divisores primos de $3^n - 1$ para n composto? Alguma conjectura? Alguma demonstração? **b)** Alguma generalização para $a^n - 1$?

Tema 9.10.5. Vimos no Problema 6.6.4 que se 3 divide $a^2 + b^2$ então 3 divide a e b, quaisquer que sejam os números naturais a e b. Investigue quais são os números primos p para os quais vale a seguinte implicação: "se p é primo e se p divide $a^2 + b^2$, sendo a e b números naturais, então p divide a e b". Alguma conjectura? Alguma demonstração? O que ocorre quando p não é primo?

Tema 9.10.6. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, defina $f(n)$ como o maior inteiro k tal que

$$k \mid x^n - x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Z}$$

Investigue o problema de encontrar $f(n)$. Em particular, verfique que $f(2) = 2$, $f(3) = 6$, $f(4) = 2$ e $f(5) = 30$.

Capítulo 10

O Método da Indução Completa

10.1 Introdução

Sabemos que as ciências naturais investigam os fenômenos utilizando os métodos de indução e dedução. Já exploramos esses conceitos nos Problemas 4.2 na página 92, em que vimos que a indução é uma operação que estabelece uma proposição geral com base no conhecimento de um certo número de dados particulares, e a dedução estabelece uma proposição geral com base em uma ou mais premissas com uma correta aplicação das regras da Lógica. Na Matemática, em particular, o método da indução é muito importante como processo de descoberta, mas preferimos a dedução como forma de construir o conhecimento matemático na esperança de obter um corpo científico duradouro.

Surge então a questão de quando e como podemos transformar um conhecimento obtido indutivamente em uma propriedade dedutiva. Veremos neste capítulo que em situações matemáticas específicas podemos usar para isso o chamado *Método da Indução Completa*, também conhecido por *Método da Indução Finita*.

10.2 Vale para 1, 2, 3, ..., n, vale sempre?

Sabemos por experiência própria que não. A História da Matemática relata exemplos de conjecturas gerais, propostas por matemáticos, usando observações particulares, mas depois essas conjecturas se mostraram incorretas. Um desses casos aconteceu com Fermat, ilustre matemático do Século XVII. Ele observou que:

$2^{2^0} + 1 = 2$ é primo;
$2^{2^1} + 1 = 5$ é primo;
$2^{2^2} + 1 = 17$ é primo;
$2^{2^3} + 1 = 257$ é primo;
$2^{2^4} + 1 = 65\,537$ é primo.

Baseando-se nestes fatos e em sua experiência em Teoria dos Números, Fermat aceitava que todos os números da forma $2^{2^n} + 1$ seriam primos. Mas, no século seguinte, Euler mostrou que

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$$

não é primo, contrariando a conjectura de Fermat. O estudante poderá verificar todas estas afirmações. Um método fácil para fazer isso é usar um aplicativo computacional algébrico.

10.3 Problemas

Problema 10.3.1. Gottfried Leibniz, eminente matemático do Século XVII, observou que:

$n^3 - n$ é múltiplo de 3 para todo número inteiro positivo n;
$n^5 - n$ é múltiplo de 5 "
$n^7 - n$ é múltiplo de 7 "

Dizem que, baseando-se nestes fatos, Leibniz supôs que $n^k - n$ seria múltiplo de k para todo número natural n e para todo ímpar positivo k. Mas ele mesmo descobriu um contra-exemplo. Demonstre as três afirmações acima e descubra você também um contra-exemplo para a conjectura.

Problema 10.3.2. Dmitry A. Grave, matemático russo, supôs que

(?) $2^{p-1} - 1$ não é múltiplo de p^2, para todo primo p.

De fato, esta afirmação é verdadeira para $p < 1000$. Mas, $2^{1092} - 1$ é múltiplo de 1093^2, e 1093 é primo. O estudante poderá usar um aplicativo computacional algébrico para verificar essa afirmação.

Problema 10.3.3. Quando se calcula a expressão $991n^2 + 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, não se encontra um quadrado de um número natural, mesmo se fizermos este cálculo até $n = 12 \times 10^{27}$. Entretanto, não se pode concluir que $991n^2 + 1$ nunca é um quadrado perfeito. De fato, para

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767,$$

a expressão $991n^2+1$ é um quadrado de um número inteiro, e este é o menor n para o qual ocorre este fenômeno. O estudante poderá verificar essa afirmação fazendo um pequeno procedimento com um aplicativo computacional algébrico.

10.4 O Método da Indução Completa

Suponhamos que estejamos interessados em obter uma fórmula para $1+2+2^2+\ldots+2^n$ sendo n um número natural qualquer. Uma fórmula talvez semelhante a $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$, a qual já conhecemos, e que nos permite calcular uma soma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ com valor de n dado sem necessidade de adicionar os números um a um.

Para obter a fórmula desejada iniciamos com o método indutivo e observamos o que ocorre para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, etc. Temos

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1+2 &= 3, \\ 1+2+2^2 &= 7, \\ 1+2+2^2+2^3 &= 15. \end{aligned}$$

Se estivermos bem atentos e se esperamos encontrar uma fórmula envolvendo potências de 2, podemos observar que os resultados particulares obtidos são antecessores de potências de 2: $1 = 2^1 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$. Isto nos leva a induzir a seguinte generalização:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{10.1}$$

Esta propriedade, no momento, é uma conjectura. Não sabemos se é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, mas temos alguns motivos para crer que seja. Podemos aumentar essa crença examinando mais casos, $n = 4$, $n = 5$, etc. Podemos mesmo programar um computador e confirmar essa conjectura para milhares de casos, ou milhões, mas continuaremos com uma conjectura, sem a certeza que desejamos. Isto porque utilizamos um procedimento indutivo, e para reforçar nosso entendimento dessa situação a denominamos *indução incompleta*.

Para demonstrar a fórmula 10.1 necessitamos imaginar um argumento geral, que se aplica para todo número natural n. Por exemplo, podemos olhar $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ como a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2, e aplicar a fórmula que conhecemos para isso.

Por outro lado, para demonstrar a fórmula 10.1 podemos insistir no método inicial, o de conferí-la para todo $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente este é um projeto impossível, mas podemos imaginar uma forma de garantir que, mesmo não verificando para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a certeza de que poderíamos fazê-lo, apenas não temos condições físicas para isso.

A idéia é simples mas significativa. Dada uma afirmação $A(n)$, dependente de $n \in \mathbb{N}$, procedemos com os seguintes passos:

Passo 1: verificar a afirmação para $n = 0$. Em outros termos, verificar que $A(0)$ é verdadeira.

Passo 2: supor que a afirmação seja verdadeira para o número natural n e demonstrar que isto implica que a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Em outros termos, demonstrar a seguinte implicação para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) \text{ verdadeira} \Rightarrow A(n+1) \text{ verdadeira},$$

Tendo verificado essas duas propriedades para a afirmação $A(n)$, podemos perceber que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, $A(0)$ é verdadeira devido ao passo 1. Aplicando agora o passo 2, vemos que $A(0) \Rightarrow A(0+1)$, portanto $A(1)$ é verdadeira. Aplicando novamente o passo 2, vemos que $A(1) \Rightarrow A(1 + 1)$, portanto $A(2)$ é verdadeira. E assim sucessivamente, podemos ver que $A(1000)$ é verdadeira, ou $A(n)$ é verdadeira para qualquer valor de n. Chamamos a este método de *indução completa*.

Voltemos à nossa afirmação 10.1, denominando-a agora $A(n)$:

$$A(n): \quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{10.2}$$

Vamos verificar que $A(n)$, com $n \geq 0$, satisfaz os passos 1 e 2 do método da indução completa.

Para $n = 0$ entendemos que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 1$, e como $2^{n+1} - 1 = 1$ para $n = 0$, vemos que $A(0)$ é verdadeira. Este é o passo 1 do método da indução completa.

Suponhamos agora que $A(n)$ seja verdadeira para algum número natural $n \geq 0$. Vamos verificar que isto implica que $A(n+1)$ é verdadeira. Temos como verdade que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Usamos isto em

$$\begin{aligned} 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1} &= (1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n)+2^{n+1} \\ &= (2^{n+1}-1)+2^{n+1} \\ &= 2\cdot 2^{n+1}-1 \\ &= 2^{n+2}-1. \end{aligned}$$

Demonstramos assim que $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$, o que nada mais é do que a validade da afirmação $A(n+1)$. Fica assim visto que $A(n)$ verdadeira $\Rightarrow A(n+1)$ verdadeira, que é o passo 2 do método da indução completa.

Concluímos que $A(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos que frequentemente uma afirmação $A(n)$ pode não ser verdadeira para alguns números naturais n. Por exemplo, a desigualdade $2^n < n!$ é falsa para $n = 0$, 1, 2 e 3. Mas constatamos que é verdadeira para $n = 4$, 5, 6 e 7. Isto nos leva a considerar a afirmação

$$2^n < n! \quad \text{para todo } n \geq 4 \text{ em } \mathbb{N}. \tag{10.3}$$

Para demonstrar essa afirmação usando o método da indução completa podemos adaptar a forma anterior para a seguinte, em que n_0 é um número natural dado:

Passo 1: verificar a afirmação para $n = n_0$. Em outros termos, verificar que $A(n_0)$ é verdadeira.

Passo 2: supor que a afirmação seja verdadeira para algum número natural $n \geq n_0$ e demonstrar que isto implica que a afirmação é verdadeira para $n+1$. Em outros termos, demonstrar a seguinte implicação: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ para todo $n \geq n_0$ em $\mathbb{N}$.

Tendo verificado estes dois passos para a afirmação $A(n)$, podemos perceber que ela é verdadeira para todo $n \geq n_0$ em $\mathbb{N}$.

Vamos conferir se a afirmação 10.3 é verdadeira verificando esses dois passos com $n_0 = 4$. Como $2^4 < 4!$, vemos que o passo 1 está correto. Suponhamos agora que 10.3 seja verdadeira para algum número natural $n \geq 4$. Temos assim $2^n < n!$ Notemos que $2^{n+1} = 2\cdot 2^n < 2\cdot n! < (n+1)n! = (n+1)!$, pois $n \geq 4$ implica $n+1 > 2$. Provamos que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ para todo $n \geq n_0$ em $\mathbb{N}$, e portanto o passo 2 está verificado. Concluímos que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$ em $\mathbb{N}$.

Problema resolvido 10.1. Demonstre que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo inteiro $n \geq 1$ usando o método da indução completa.

Solução.
Passo 1: verificar a afirmação para $n = 1$.

Para $n = 1$, a afirmação diz que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

o que é verdadeiro.

Passo 2: supor que a afirmação seja verdadeira para o número natural $n \geq 1$ e demonstrar que isto implica que a afirmação é verdadeira para $n+1$. Isto equivale a supor ser verdadeiro que

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{$*$}$$

e deve ser verificado que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad (**)$$

Para demonstrar $(**)$ a partir de $(*)$ procedemos assim:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(devido a } (*)\text{)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

e fica provado $(**)$.

Em virtude do método da indução completa a afirmação está provada para todo número natural $n \geq 1$. □

Problema resolvido 10.2. Demonstre, usando o método da indução completa, que a soma dos n primeiros números ímpares positivos é igual a n^2.

Solução. De fato,

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2; \\
1 + 3 &= 4 = 2^2; \\
1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2; \\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2; \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2.
\end{aligned}$$

Estes eventos nos sugerem

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ em } \mathbb{N}. \qquad (10.4)$$

Vamos chamar esta afirmação de $A(n)$, e verificar os dois passos do método da indução completa.

Passo 1: provar a afirmação $A(1)$.

O primeiro número ímpar é 1, e $1 = 1^2$. Portanto, $A(1)$ é verdadeira.

Passo 2: provar que se $A(n)$ é verdadeira então $A(n+1)$ é verdadeira. Em outros termos, vamos supor que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad (*)$$

seja verdadeiro e provar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2. \qquad (**)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2n+1) &= 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\\ &= n^2+2n+1 \quad (\text{devido a } (*))\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Portanto, $(*)$ implica $(**)$, e com isto fica estabelecido o passo 2 da indução completa. Podemos concluir que é verdadeira a afirmação 10.4. □

Segundo Proclus Diadochus, filósofo, matemático e historiador do Século V, o método da indução completa era essencialmente conhecido pela Escola Pitagórica. O primeiro escritor a utilizar explicitamente o método foi Francisco Maurolico, em sua obra *Arithmetica*, de 1575. Blaise Pascal, por volta de 1653, usou o método para demonstrar uma propriedade do triângulo aritmético, hoje chamado triângulo de Pascal, em sua homenagem. A forma adotada por Pascal está bem próxima da que é utilizada nos dias atuais.

No método da indução completa o passo 1 chama-se *base da indução*. No passo 2 a afirmação "$A(n)$ é verdadeira"chama-se *hipótese da indução*, e a afirmação "$A(n+1)$ é verdadeira"chama-se *tese da indução*. Se for conveniente a condição $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ pode ser substituída por $A(n-1) \Rightarrow A(n)$, ou outra forma equivalente.

10.5 Problemas

Problema 10.5.1. Desmonstre que $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ para todo número natural n usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica. Procure esta última fórmula em algum livro. Observe se, para obter a fórmula, o autor usou indução ou dedução.

Problema 10.5.2. Observe que

$$\begin{aligned}1 &< 2\\ 2 &< 2^2\\ 3 &< 2^3, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Extraia daí uma afirmação $A(n)$, e demonstre-a pelo método da indução completa.

Problema 10.5.3. A partir dos experimentos

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

induza uma fórmula geral para a soma

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

para todo $n \geq 1$. Demonstre a fórmula pelo método da indução completa.

Problema 10.5.4. Deduza uma fórmula para o produto

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

para todo $n \geq 1$.

Problema 10.5.5. Deduza uma fórmula para o produto

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

para todo $n \geq 2$.

Problema 10.5.6. Prove que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo $n \geq 1$.

Problema 10.5.7. Demonstre que

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

para todo $n \geq 1$.

Problema 10.5.8. Prove que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

para todo $n \geq 1$.

Problema 10.5.9. Em uma festa com n pessoas, todas cumprimentaram com um aperto de mãos cada uma das outras. Calcule quantos apertos de mãos ocorreram, e justifique.

10.6 O segundo princípio da Indução Completa

Nas seções anteriores fizemos uma apresentação informal do método da indução completa. Para prosseguir necessitamos de uma apresentação mais formal. Vejamos duas formulações do método, a primeira já é conhecida, mas tem a diferença de que o número de partida n_0 pode ser negativo.

Primeiro Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
a) $A(n_0)$ é verdadeira;
b) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(n)$ é verdadeira então $A(n+1)$ é verdadeira.
Nestas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

O método descrito acima é uma consequência direta do Princípio de Indução estudado na página 194. De fato, seja V o conjunto dos números inteiros $n \geq n_0$ para os quais $A(n)$ é

verdadeira. Consideremos o conjunto $S = V - n_0 = \{m - n_0 \mid m \in V\}$. Temos $S \subseteq \mathbb{N}$. Como $n_0 \in V$ temos $0 \in S$, portanto está satisfeita a condição (i) do Princípio de Indução. Seja $n \in S$. Então $n = m - n_0$ para algum $m \in V$. Em virtude da condição b) acima temos $m + 1 \in V$. Logo $n+1 = (m+1) - n_0 \in S$. Portanto está satisfeita a condição (ii) do Princípio de Indução, do que segue que $S = \mathbb{N}$. Seja agora um inteiro qualquer $n \geq n_0$. Como $n - n_0 \in \mathbb{N}$ temos $n - n_0 \in S$ o que implica $n \in V$. Isto termina a demonstração.

A segunda formulação do método é equivalente à primeira mas nos permite lidar mais facilmente com certos tipos de afirmações recorrentes.

Segundo Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
a) $A(n_0)$ é verdadeira;
b) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(r)$ é verdadeira para todo número inteiro r tal que $n_0 \leq r \leq n$ então $A(n+1)$ é verdadeira.
Nestas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

Uma forma de demonstrar esse método consiste em utilizar o Teorema 9.7. Seja $V = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0 \text{ e } A(n) \text{ é verdadeira}\}$. Queremos provar que $V = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Suponhamos que sejam diferentes. Então é não vazio e limitado inferiormente o conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} - V$. Seja m o mínimo de A. Consideremos o número $n = m - 1$. Temos $n_0 \in V \Rightarrow n_0 \notin A \Rightarrow m > n_0 \Rightarrow m - 1 \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0$. Para todo inteiro r tal que $n_0 \leq r \leq n$ temos $r \notin A \Rightarrow r \in V$. Em virtude da condição b) acima $m \in V$. Mas então $m \notin A$, o que é uma contradição.

Vejamos dois exemplos de aplicação do Segundo Princípio da Indução Completa.
Definimos a *sequência de Fibonacci* $(f_n)_{n\geq 0}$ por

$$\begin{cases} f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{10.5}$$

Portanto a sequência $(f_n)_{n\geq 0}$ é constituída pelos números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., cada número é a soma dos dois anteriores.
Problema resolvido 10.3. Prove que todo número natural é um número de Fibonacci ou pode ser representado como a soma de números de Fibonacci diferentes dois a dois.

Solução. Consideremos a afirmação $A(n)$:
"Todo número natural n é um número de Fibonacci ou é a soma de números de Fibonacci diferentes dois a dois."
Vamos provar que $A(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$ usando o Segundo Princípio da Indução Completa.
Observemos que $A(0)$ é verdadeira, pois para $n = 0$ temos $0 = f(0)$. Ainda, $A(1)$ também é verdadeira pois para $n = 1$ temos $1 = f(1)$.
Seja $n \geq 1$ um número inteiro, e suponhamos que $A(r)$ seja verdadeira para todo número inteiro r tal que $1 \leq r \leq n$. Vamos provar que $A(n+1)$ é verdadeira. Como os números de Fibonacci formam uma sequência crescente, existe um número inteiro m tal que $f_m \leq n+1 < f_{m+1}$. Temos $f_m \geq 2$ e $m \geq 3$. Se $n+1 = f_m$, terminamos. Suponhamos que $f_m < n+1$, e consideremos a diferença $r = n + 1 - f_m$. Como $1 \leq r \leq n$ temos que $A(r)$ é verdadeira, e assim r se escreve na forma

$$r = f_{i_1} + f_{i_2} + \ldots + f_{i_s},$$

em que $f_{i_1} < f_{i_2} < \ldots < f_{i_s}$. Neste caso $n+1 = r + f_m = f_{i_1} + f_{i_2} + \ldots + f_{i_s} + f_m$. Para terminar basta provar que $f_{i_s} \neq f_m$. Afirmamos que $f_{i_s} < f_m$. Se fosse $f_{i_s} \geq f_m$ teríamos $n+1 = f_m + r \geq f_m + f_{i_s} \geq f_m + f_m > f_m + f_{m-1} = f_{m+1}$, o que é uma contradição. Fica provado que $A(n+1)$ é verdadeira.

Em virtude do Segundo Princípio da Indução Completa a afirmação $A(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 0$. □

Problema resolvido 10.4. Todo número natural ≥ 2 é primo ou se escreve como produto de primos.

Solução. Este resultado já foi demonstrado no Teorema 4.22 na página 109. Apresentamos outra demonstração usando o Segundo Princípio da Indução Completa.

Consideremos a afirmação $A(n)$:

"n é primo ou se escreve como produto de primos."

Observemos que $A(2)$ é verdadeira, pois 2 é primo. Seja $n \geq 2$ um inteiro e suponhamos que $A(r)$ seja verdadeira para todo r tal que $2 \leq r \leq n$. Vamos provar que $A(n+1)$ é verdadeira. Se $n+1$ é primo, terminamos. Suponhamos que $n+1$ não seja primo. Então existem inteiros positivos a e b tais que $n+1 = ab$, $2 \leq a < n+1$ e $2 \leq b < n+1$. Portanto $A(a)$ e $A(b)$ são verdadeiras e a e b são primos ou produto de primos. Mas então $n+1$ é um produto de primos. Assim $A(n+1)$ é verdadeira.

Em virtude do Segundo Princípio da Indução Completa a afirmação $A(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 2$. □

10.7 Problemas

Problema 10.7.1. Prove que dois termos consecutivos quaisquer da sequência de Fibonacci são relativamente primos.

Problema 10.7.2. Prove que a seguinte afirmação a respeito da sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ é verdadeira para todo número natural n: se n é múltiplo de 4 então f_n é múltiplo de 3.

Problema 10.7.3. Demonstre, usando o Segundo Princípio da Indução Completa, que os números de Fibonacci podem ser expressos pela seguinte fórmula:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Problema 10.7.4. A *sequência de Lucas* $(l_n)_{n\geq 1}$ é definida por

$$\begin{cases} l_1 = 1, \quad l_2 = 3, \\ l_n = l_{n-1} + l_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases} \tag{10.6}$$

Demonstre que

$$l_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \geq 1,$$

sendo $\alpha = \big(1+\sqrt{5}\big)/2$ e $\beta = \big(1-\sqrt{5}\big)/2$.

Problema 10.7.5. Demonstre o seguinte resultado sobre a sequência de Lucas: $l_n < (7/4)^n$, $n \geq 1$.

10.8 Problemas adicionais

Problema 10.8.1. Já vimos os números binomiais $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ sendo $0 \leq i \leq n$ naturais. Esses números são inteiros, pois medem a quantidade de subconjuntos com i elementos de um conjunto com n elementos. **a)** Verifique a relação de recorrência binomial: para todo $n \geq 2$ e $0 < i < n$ vale que $\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}$. **b)** Usando o método da indução completa demonstre a fórmula do binômio

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

quaisquer que sejam os números reais x e y e o número natural $n \geq 1$. **c)** Usando o método da indução completa mostre diretamente que todo número binomial é inteiro.

Problema 10.8.2. Retome o Problema 4.2.2 da página 92 e demonstre-o usando o método da indução completa.

Problema 10.8.3. Prove que $3^{2n} - 1$ é múltiplo de 8 para todo número natural n.

Problema 10.8.4. Prove que $n^3 + 2n$ é múltiplo de 3 para todo número natural $n \geq 1$.

Problema 10.8.5. Prove que todo polígono convexo com $n \geq 3$ lados tem $n(n-3)/2$ diagonais.

Problema 10.8.6. Use o método da indução completa para verificar que

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n}) = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a-1}, \quad n \geq 0,$$

para todo número real $a \neq 1$.

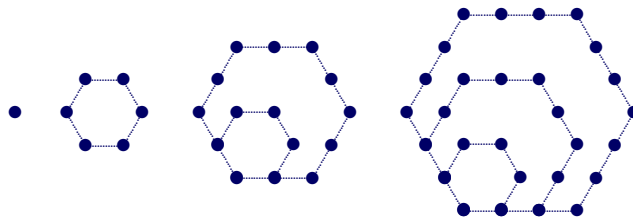
Problema 10.8.7. Demonstre, pelo método da indução completa, as desigualdades

$$n^2 < n!, \quad n \geq 4;$$
$$n^3 < n!, \quad n \geq 6;$$
$$n^2 < 2^n, \quad n \geq 5;$$
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2.$$

Problema 10.8.8. Prove, pelo método da indução completa, que

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1, \quad n \geq 1.$$

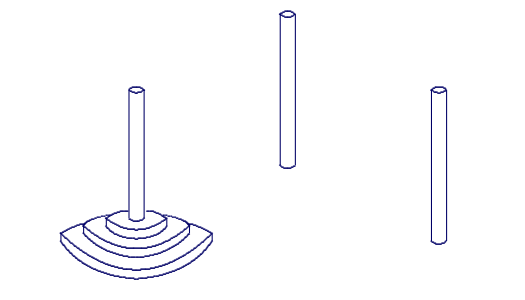
Problema 10.8.9. Prove, pelo método da indução completa, o Pequeno Teorema de Fermat: se p é primo e a é inteiro então $p|(a^p - a)$.

Problema 10.8.10. Considere a sequência das figuras hexagonais:

Observando a lei de formação dessas figuras, obtemos a seguinte definição por recorrência dos números hexagonais:

$$\begin{cases} H_1 = 1, \\ H_n = H_{n-1} + 4n - 3, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{10.7}$$

Demonstre, pelo método da indução completa, que

$$H_n = \frac{n(4n-2)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Problema 10.8.11. Um jogo chamado *Torre de Hanoi*, inventado pelo matemático francês Edouard Lucas, consiste de três bastões fixados verticalmente em uma base, e n discos de tamanhos diferentes, perfurados no centro, de modo que possam ser colocados nos bastões.

O jogo começa com os n discos colocados em um bastão, dispostos, de baixo para cima, em ordem decrescente de tamanho. Todos os discos devem ser transferidos para um dos outros bastões. O terceiro bastão pode ser utilizado como passagem. O movimento permitido é tirar o disco superior de um bastão e colocá-lo em outro, desde que não sobre um disco menor.

Seja m_n o menor número de movimentos necessários para transferir n discos de um bastão para outro. Observe que $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 7$ e $m_4 = 15$. Demonstre que $m_n = 2^n - 1$ para todo $n \geq 1$.

"Conta-se" que, em um mosteiro na Índia, os monges se revezam na tarefa de transferir 64 discos de ouro, obedecendo às regras do jogo. Fazem-no desde o começo do mundo, à razão de um disco por segundo. Diz a "lenda" que, quando os monges terminarem seu trabalho, o mundo acabará. Supondo que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos, calcule por quanto tempo ele ainda existirá.

Problema 10.8.12. Ao usar o método da indução completa, o estudante inexperiente pode julgar sem importância a verificação da primeira parte do método. Os seguintes exemplos irão convencê-lo do contrário.

Todas as afirmações abaixo são falsas. Verifique, em cada caso, que a segunda parte do método da indução completa pode ser demonstrada.

(FALSO) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 + 3, \quad n \geq 1$;

(FALSO) $n^2 + n$ é ímpar para todo n;

(FALSO) $n = n + 1$ para todo número natural n, isto é, todos os números naturais são iguais.

Problema 10.8.13. Considere a afirmação obviamente falsa: "n elementos quaisquer são iguais dois a dois, para todo número natural $n \geq 1$". Descubra onde está o erro da seguinte "demonstração":

"É claro que esta afirmação vale para $n = 1$. Vamos mostrar que se a afirmação vale para n então vale para $n+1$. Consideremos $n+1$ elementos a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}. Então os n elementos a_1, a_2, ..., a_n são iguais dois a dois, devido à hipótese da indução. Pelo mesmo motivo são

iguais dois a dois os n elementos a_2, a_3, ..., a_{n+1}. Mas então os $n+1$ elementos a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1} são iguais dois a dois."

O que está errado?

Problema 10.8.14. Esta é uma versão mais popular do exercício anterior. Considere a seguinte afirmação $A(n)$, obviamente falsa: "se, numa classe com $n \geq 1$ alunos, um for muito inteligente, então todos os alunos da classe são muito inteligentes".

Decubra onde está o erro da seguinte "demonstração", que utiliza o método da indução completa.

"É claro que a afirmação vale para $n = 1$. Vamos supor que a afirmação seja válida para n, e prová-la para $n+1$. Consideremos uma classe com $n+1$ alunos na qual exista um aluno muito inteligente. Retiremos da classe um aluno que não seja este último. Temos então uma classe com n alunos, um dos quais é muito inteligente. Em virtude da hipótese da indução, todos os alunos da classe são muitos inteligentes. Retirando da classe um desses alunos e recolocando aquele que foi retirado, temos novamente uma classe com n alunos, um dos quais, pelo menos, é muito inteligente. Novamente concluímos que todos estes alunos são muito inteligentes. Portanto, todos os $n+1$ alunos da classe são muito inteligentes. Em virtude do método da indução completa, $A(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$".

Onde está o erro?

Problema 10.8.15. A fórmula para f_n apresentada no Problema 10.7.3 foi observada pelo matemático Abraham De Moivre em 1718 e demonstrada dez anos mais tarde por Nicolaus Bernoulli.

Complete os detalhes. Sejam α e β as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Portanto $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Multiplicando estas igualdades por α^{n-2} e β^{n-2} respectivamente, obtemos $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$ e $\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}$ para todo $n \geq 2$. O estudante pode notar que as potências α^n e β^n obedecem à mesma lei da recorrência que a sequência de Fibonacci: cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Por isso $x^2 = x + 1$ chama-se *equação característica* desta lei de recorrência, e a experiência sugere que f_n é uma combinação linear de α^n e β^n, isto é, existem números reais A e B tais que

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Usando essa relação para $n = 0$ e $n = 1$ calcule A e B, e encontre a fórmula no Problema 10.7.3. Isto é uma demonstração para esta fórmula?

Problema 10.8.16. E. Lucas descobriu em 1876 que os números de Fibonacci podem ser escritos na forma

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j},$$

onde j é o maior inteiro menor ou igual a $(n-1)/2$. Esta fórmula pode ser demonstrada através do método da indução completa.

10.9 Temas para investigação

Tema 10.9.1. a) Vimos no Problema 10.8.7 que $n^2 < n!$ para todo $n \geq 4$ e que $n^3 < n!$ para todo $n \geq 6$. Verifique se existe um número natural n_0 tal que $n^4 < n!$ para todo $n \geq n_0$.

Investigue alguma possível generalização. **b)** Demonstre que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$ e que $3^n < n!$ para todo $n \geq 7$. Verifique se existe um número natural n_0 tal que $4^n < n!$ para todo $n \geq n_0$. Investigue alguma possível generalização. **c)** Vimos no Problema 10.8.7 que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$. Investigue alguma possível generalização. **d)** Examine a distância entre 2^n e $n!$ e verifique que ela aumenta consideravelmente à medida que n cresce. Portanto 2^n não é uma boa aproximação de $n!$ Investigue uma aproximação melhor.

Tema 10.9.2. O *Pequeno Teorema de Fermat* diz que se p é primo então p é divisor de $a^p - a$ para todo número natural a. Investigue o que ocorre se p não é primo. Por exemplo, considere $p = 6$. Investigue para quais números naturais a temos que $a^6 - a$ é ou não um múltiplo de 6. Faça uma conjectura e demonstre.

Tema 10.9.3. Faça uma pequena modificação no Problema 10.8.9 e demonstre a seguinte versão do Pequeno Teorema de Fermat: *se p é primo e a é inteiro tal que $p \nmid a$ então $p|(a^{p-1} - 1)$.* Uma afirmação recíproca direta desse resultado não é verdadeira, mas pode-se investigar afirmações recíprocas impondo-se condições adicionais.

Tema 10.9.4. Investigue regularidades e fórmulas relativas à sequência de Fibonacci. Por exemplo, encontre (e justifique) uma fórmula para a soma dos n primeiros termos da sequência.

Capítulo 11

A equação $\mathbf{ax + by = c}$ em $\mathbb{Z}$

11.1 Introdução

Sejam a, b e c números inteiros com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. A equação

$$ax + by = c, \quad \text{com } x, y \in \mathbb{Z}, \tag{11.1}$$

chama-se *equação diofantina linear a duas incógnitas.* A literatura utiliza esse nome em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria, devido à ênfase que ele deu às equações com soluções inteiras ou racionais em seu livro *Arithmetica*, escrito no Século III.

Os hindus utilizavam equações diofantinas lineares para calcular períodos astronômicos. Encontravam as soluções através de um algoritmo denominado *kuttaka*, que descreveremos aqui. Veremos também um método algébrico que inclui uma fórmula que fornece todas as soluções.

As equações diofantinas lineares têm diversas aplicações na Matemática. Neste texto apresentaremos alguns problemas em que elas aparecem, e que o estudante certamente achará interessantes.

11.2 Exemplos iniciais

"De quantas maneiras pode o encarregado do caixa de um banco pagar a um cliente a quantia de R$ 1000,00 em notas de R$ 10,00 e R$ 50,00?" Se x é a quantidade de notas de R$ 10,00 e y é a de notas de R$ 50,00, queremos resolver a equação

$$10x + 50y = 1000, \quad \text{com } x, y \in \mathbb{N}. \tag{11.2}$$

Simplificando $10x+50y = 1000$ por 10 temos $x+5y = 100$. Tomando $y = t$ como parâmetro vem $x = 100 - 5t$. Portanto as soluções são $(x, y) = (100 - 5t, t)$ com $t \in \mathbb{Z}$. Mas queremos soluções com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Notemos que $x \geq 0 \iff t \leq 20$ e $y \geq 0 \iff t \geq 0$. Encontramos assim 21 soluções, dadas por $(x, y) = (100 - 5t, t)$ com $t \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq t \leq 20$.

Vimos dessa forma um exemplo de equação diofantina linear que tem infinitas soluções. Mas pode ocorrer outra situação. Notemos que a equação $21x + 9y = 5$ não tem solução para $x, y \in \mathbb{Z}$. De fato, se existissem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $21x_0 + 9y_0 = 5$, teríamos $3 \mid 21x_0 + 9y_0$, mas $3 \nmid 5$, o que seria uma contradição.

Assim uma primeira observação de caráter geral é que se $ax + by = c$ tem solução com $x, y \in \mathbb{Z}$, então todo divisor comum de a e b é também divisor de c. Dessa forma uma condição necessária para que existam soluções é que $\text{mdc}(a, b) \mid c$. Veremos que essa condição é suficiente para que exista solução.

Notamos algumas situações particulares em que é fácil resolver 11.1. Se $a = 1$, tomamos $y = t$ como parâmetro, e as soluções de $x + by = c$ são dadas por $(x, y) = (c - bt, t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Se $b = 1$, tomamos $x = t$ como parâmetro, e as soluções de $ax + y = c$ são dadas por $(x, y) = (t, c - at)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Outra situação particular ocorre se $a = b$ na equação 11.1. Temos $a(x + y) = c$, que tem solução se e somente se $a \mid c$. Neste caso, tomando $y = t$ como parâmetro, as soluções são $(x, y) = (\frac{c}{a} - t, t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Um exemplo que não se encaixa nos casos anteriores é $3x + 5y = 2$. A idéia é manipular esta equação e expressá-la em uma das formas anteriores. Notando que $3x + 5y = 2 \iff 3(x + y) + 2y = 2$, introduzimos a variável $z = x + y$, e obtemos $3z + 2y = 2$. De modo similar observamos que $3z + 2y = 2 \iff z + 2(z + y) = 2$. Definimos a variável $w = z + y$, e obtemos $z + 2w = 2$. Esta última equação é do tipo desejado.

Esse processo nos deu três sistemas equivalentes:

$$3x + 5y = 2 \iff \begin{cases} 3z + 2y &= 2 \\ x + y &= z \end{cases} \iff \begin{cases} z + 2w &= 2 \\ x + y &= z \\ z + y &= w \end{cases}$$

Tomando $w = t$ como parâmetro, as soluções de $z + 2w = 2$ são $(z, w) = (2 - 2t, t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Então $y = w - z = t - (2 - 2t) = 3t - 2$ e $x = z - y = 2 - 2t - (3t - 2) = -5t + 4$. Obtivemos assim o conjunto solução de $3x + 5y = 2$, a saber, $(x, y) = (-5t + 4, 3t - 2)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

11.3 O método da pulverização

Para resolver a equação $9x + 2y = 5$ utilizando o processo descrito no final da seção anterior, temos que aplicar vários passos, fazendo $9 - 2 = 7$, $7 - 2 = 5$, $5 - 2 = 3$, $3 - 2 = 1$. São subtrações sucessivas. Isto nos indica que podemos economizar alguns passos se considerarmos a divisão de 9 por 2. Como $9 = 4 \cdot 2 + 1$, temos $9x + 2y = 5 \iff (4 \cdot 2 + 1)x + 2y = 5 \iff x + 2(4x + y) = 5$. Pondo $z = 4x + y$ temos a equação $x + 2z = 5$, cujas soluções são $z = t$ e $x = 5 - 2t$. Portanto $y = z - 4x = t - 4(5 - 2t) = 9t - 20$, e as soluções de $9x + 2y = 5$ com $x, y \in \mathbb{Z}$ são $(x, y) = (5 - 2t, 9t - 20)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Em geral, dada $ax + by = c$ com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) \mid c$, podemos encontrar seu conjunto solução para $x, y \in \mathbb{Z}$ utilizando o procedimento descrito acima. Para mais detalhes confira o Problema 11.5.10. Este é o chamado algoritmo *kuttaka*, ou método da *pulverização*, adotado pelos antigos astrônomos hindus ([111], páginas 114 e 115).

Problema resolvido 11.1. Encontre as soluções de $19x + 4y = 3$, para $x, y \in \mathbb{Z}$.

Solução. Como $\text{mdc}(19, 4) = 1$ e $1 \mid 3$ então a equação dada tem solução. Como $19 = 4 \cdot 4 + 3$ temos $(4 \cdot 4 + 3)x + 4y = 3 \iff 4(4x + y) + 3x = 3$. Pondo $z = 4x + y$ obtemos a primeira redução $4z + 3x = 3$. Esta última pode ser escrita na forma $z + 3(z + x) = 3 \iff z + 3w = 3$ com $w = z + x$. Tomando $w = t$ como parâmetro vem $z = 3 - 3t \Rightarrow x = w - z = 4t - 3 \Rightarrow y = z - 4x = 15 - 19t$. Portanto as soluções são $(x, y) = (4t - 3, 15 - 19t)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. □

Confira a seguinte variação do método da pulverização, utilizada por L. Euler em seu livro *Algebra*, de 1770. Para resolver $5x - 17y = 3$ observamos que $17 = 3 \cdot 5 + 2$ e escrevemos

$$x = \frac{17y+3}{5} = \frac{3 \cdot 5y + 2y + 3}{5} = 3y + \frac{2y+3}{5}.$$

O número $(2y+3)/5$ deve ser um inteiro. Chamando-o de z temos

$$\frac{2y+3}{5} = z \iff 2y + 3 = 5z \iff 2y - 5z = -3.$$

Repetindo o processo para esta última equação temos

$$y = \frac{5z-3}{2} = 2z - 1 + \frac{z-1}{2},$$

e $(z-1)/2$ deve ser um inteiro, digamos $(z-1)/2 = w$. Então $z - 1 = 2w$. Tomando $w = t$ como parâmetro, vem $z = 2t + 1 \Rightarrow$

$$y = \frac{5z-3}{2} = \frac{5(2t+1)-3}{2} = 5t + 1$$

e

$$x = \frac{17y+3}{5} = \frac{17(5t+1)+3}{5} = 17t + 4.$$

Portanto as soluções são $(x, y) = (17t + 4, 5t + 1)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Terminamos esta seção apresentando uma observação que permite resolver rapidamente a equação $52x+3y = 12$. Como $3 \mid 12-3y$ então $3 \mid 52x \Rightarrow 3 \mid x$. Escrevemos $x = 3x_1$. A equação dada se reduz a $52x_1 + y = 4$. Tomando $x_1 = t$ como parâmetro vem $x = 3t$ e $y = 4 - 52t$. Portanto as soluções são $(x, y) = (3t, 4 - 52t)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

11.4 Uma fórmula para as soluções

É dada pelo seguinte

Teorema 11.2. *Sejam a, b e c números inteiros com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. A equação diofantina linear*

$$ax + by = c, \quad \text{com } x, y \in \mathbb{Z},$$

tem solução se e somente se $d = \operatorname{mdc}(a, b)$ é divisor de c. Neste caso, se (x_0, y_0) é uma solução, então as soluções são dadas por $(x, y) = (x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ são tais que $ax_0 + by_0 = c$ então $d \mid a$ e $d \mid b$ implicam $d \mid c$. Reciprocamente, se $d \mid c$, seja $c = c_1 d$. Sabemos que existem inteiros r e s tais que $ra + sb = d$. Logo $a(c_1 r) + b(c_1 s) = c_1 d = c$, e $(x_0, y_0) = (c_1 r, c_1 s)$ é uma solução.

Para demonstrar a segunda parte do Teorema, observamos primeiro que se (x_0, y_0) é uma solução, então $(x, y) = (x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t)$ é uma solução para todo $t \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$a\left[x_0 + \frac{b}{d}t\right] + b\left[y_0 - \frac{a}{d}t\right] = ax_0 + by_0 = c.$$

Vamos mostrar que toda solução é desta forma. Seja (x_1, y_1) uma solução qualquer. Então $ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1$ o que implica $b(y_0 - y_1) = a(x_1 - x_0)$. Ponhamos $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$. Então a_1 e b_1 são relativamente primos e $b_1(y_0 - y_1) = a_1(x_1 - x_0)$. Portanto $b_1 \mid x_1 - x_0$, e existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 - x_0 = tb_1$. Substituindo isso em $b_1(y_0 - y_1) = a_1(x_1 - x_0)$ vem $y_0 - y_1 = ta_1$. Portanto $x_1 = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y_1 = y_0 - \frac{a}{d}t$. Chegamos assim à forma desejada. □

Problema resolvido 11.3. Encontre as soluções de $78x + 105y = 51$, para $x, y \in \mathbb{Z}$, usando a fórmula do Teorema 11.2.

Solução. Primeiro necessitamos calcular mdc(78, 105). Usaremos o algoritmo euclidiano, o que nos permitirá também calcular uma solução particular. Temos

$$105 = 1 \cdot 78 + 27, \quad 78 = 2 \cdot 27 + 24, \quad 27 = 1 \cdot 24 + 3, \quad 24 = 8 \cdot 3 + 0,$$

o que nos leva a $\text{mdc}(78, 105) = 3$. Como $3 \mid 51$, vemos que a equação dada tem infinitas soluções. Para obter inteiros r e s tais que $78r+105s = 3$ fazemos $3 = 27-24 = 27-(78-2\cdot 27) = 3 \cdot 27 - 78 = 3(105 - 78) - 78 = 78(-4) + 3 \cdot 105$. Portanto

$$78(-4 \cdot 17) + 105(3 \cdot 17) = 3 \cdot 17 \Rightarrow 78(-68) + 105(51) = 51.$$

Dessa forma $(x_0, y_0) = (-68, 51)$ é uma solução, e a solução geral dada pela fórmula do Teorema 11.2 é

$$(x, y) = \left(-68 + \frac{105}{3}t, 51 - \frac{78}{3}t\right) = (-68 + 35t, 51 - 26t), \ t \in \mathbb{Z}.$$

□

11.5 Problemas

Problema 11.5.1. Analise a equação 11.1 quando $c = 0$.

Problema 11.5.2. Mostre que a equação diofantina linear $3x - 29y = 1$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, tem infinitas soluções. Encontre-as utilizando o método da pulverização. Resolva também essa mesma equação com a fórmula apresentada no Teorema 11.2. Compare os dois métodos.

Problema 11.5.3. Este problema faz parte da coleção de enigmas publicados por Claude G. Bachet em 1612. "41 pessoas tomam parte de uma refeição. A conta é de 41 *sous*. Cada homem paga 4 *sous*, cada mulher, 3 e cada criança $\frac{1}{3}$ de *sous*. Quantos são os homens, e as mulheres, e as crianças?".

Problema 11.5.4. Dentre os problemas compilados por Alcuin de York, na Idade Média, consta o seguinte. "Se 100 *bushels* de grãos são distribuídos entre 100 pessoas de modo que cada homem receba três *bushels*, cada mulher, dois, e cada criança, metade de um *bushel*, quantos são os homens, e as mulheres, e as crianças?"

Problema 11.5.5. Um problema extraído da obra *Algebra*, de L. Euler: "Um homem comprou cavalos e vacas gastando um total de \$ 1770. Cada cavalo custou \$ 31 e cada vaca, \$ 21. Quantos cavalos e quantas vacas foram comprados?"

Problema 11.5.6. Encontre o menor inteiro positivo que tem restos 3 e 7 quando dividido, respectivamente, por 5 e 11.

Problema 11.5.7. Um comerciante tem 500 litros de um certo produto que devem ser distribuídos em recipientes de 3 e 5 litros. Quantos recipientes de cada tipo devem ser adquiridos de modo a minimizar seu custo?

Problema 11.5.8. Exprimir o número 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo por 11.

Problema 11.5.9. Dispomos de duas ampulhetas, uma mede 6 minutos, outra mede 11. Como medir 13 minutos?

Problema 11.5.10. Confira os detalhes da seguinte versão geral do método da pulverização. Consideremos a equação diofantina linear $a_1x_2 + a_2x_1 = c$, dados $a_1, a_2, c \in \mathbb{Z}$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, tais que $d = \text{mdc}(a_1, a_2) \mid c$. Simplificando a equação por d podemos supor $d = 1$. Aplicando o algoritmo euclidiano a a_1 e a_2 temos

$$\begin{array}{rcll} a_1 & = & q_1a_2 + a_3 & 0 < a_3 < |a_2| \\ a_2 & = & q_2a_3 + a_4 & 0 < a_4 < a_3 \\ a_3 & = & q_3a_4 + a_5 & 0 < a_5 < a_4 \\ \vdots & & & \\ a_{n-3} & = & q_{n-3}a_{n-2} + a_{n-1} & 0 < a_{n-1} < a_{n-2} \\ a_{n-2} & = & q_{n-2}a_{n-1} + a_n & \end{array}$$

em que $a_n = 1$ é o $\text{mdc}(a_1, a_2)$.

Utilizamos as seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & q_1x_2 + x_1 \\ x_4 & = & q_2x_3 + x_2 \\ x_5 & = & q_3x_4 + x_3 \\ \vdots & & \\ x_n & = & q_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2} \end{array}$$

Introduzindo $a_1 = q_1a_2 + a_3$ em $a_1x_2 + a_2x_1 = c$ vem $a_2(q_1x_2 + x_1) + a_3x_2 = c$, ou $a_2x_3 + a_3x_2 = c$. E assim sucessivamente, após a última substituição, vem $a_{n-1}x_n + a_nx_{n-1} = c$, ou $a_{n-1}x_n + x_{n-1} = c$. Tomando $x_n = t$ como parâmetro obtemos x_{n-1} em função de t, depois x_{n-2}, e sucessivamente, no final das substituições, obtemos x_2 e x_1 em função de t.

11.6 Temas para investigação

Tema 11.6.1. Investigue métodos de resolução de equações diofantinas lineares com n variáveis da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad \text{com } x_i \in \mathbb{Z}, \tag{11.3}$$

em que $a_i \neq 0$ são inteiros para todo i. Encontre condições necessárias e suficientes para que exista solução.

Tema 11.6.2. Num tabuleiro infinito de xadrez, o cavalo, partindo de uma determinada casa, pode atingir quais outras casas?

Tema 11.6.3. Um sapo sobe uma escada com degraus numerados a partir de 1. O sapo só dá saltos de 5 ou 7 degraus de cada vez. Por exemplo, partindo do chão, o sapo pode chegar ao 17º degrau dando dois saltos de 5 e um de 7. Poderá o sapo chegar ao 23º degrau? Quais são os degraus que o sapo pode atingir?

Estude a seguinte generalização. Sejam a e b números inteiros positivos. Encontre a estrutura do conjunto $S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Tema 11.6.4. O sapo do tema anterior agora dá saltos de 5 ou 7 ou 11 degraus de cada vez. Estude a estrutura do conjunto $S = \{5x + 7y + 11z \mid x, y, z \in \mathbb{Z}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Apêndice A

Lista dos primos até 1700

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699				

Apêndice B

Respostas e sugestões a alguns problemas

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Muitas vezes não apresentamos nenhum argumento, o que significa que ficou por conta do aluno. Em resumo, muitas respostas devem ser vistas apenas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los. Examine bem os exemplos que demos no texto, eventualmente eles podem servir de inspiração.

Problemas 1.8

1.8.1 (F) (V) (F) (F) (F)
1.8.2 No sentido figurado, para indicar algo muito difícil de fazer.
1.8.3 Ele pode fazer uma correspondência um a um entre o conjunto de pedrinhas e o conjunto das ovelhas. O jovem pastor não precisa saber contar. Este não é um sistema de numeração, pois não fornece um método de enumeração dos números naturais.
1.8.4 Numeral; número ou numeral; número (sistema romano) ou numeral; numeral.
1.8.5 (F) (V) (F) (V) (V) (F)
1.8.8 É um sistema de numeração aditivo de base dois. Os vocábulos básicos são: enea e petcheval. A regra do sucessor pode ser descrita da seguinte forma. Se o nome de um número termina com o vocábulo *petcheval*, o nome de seu sucessor se obtém repetindo-se todos os vocábulos *petcheval* e acrescentando-se o vocábulo *enea*. Se o nome de um número termina com o vocábulo *enea*, o nome de seu sucessor se obtém substituindo-se esse vocábulo por *petcheval*.
1.8.11 11
1.8.14 4444444442
1.8.16 Agrupe as unidades de n em grupos com β unidades cada, formando a amaior quantidade possível de grupos. Considere dois casos, um em que não sobrm unidades (o resto é zero) e outro em que sobram r unidades, com r menor do que β. Em cada caso veja como deve ser a representação. A representação é única pois, nessas condições, q e r são únicos.
1.8.18 Vale a existência mas não a unicidade.
1.8.19 9 999 999 e 99999.
1.10.2 Confira [43].

Problemas 2.3

2.3.1 21; 4; 45. O número 5 em 456 é a quantidade de pelotões completos que sobram depois de formados os 4 esquadrões.
2.3.2 a) 1427; b) 7 pedrinhas, 2 dedos abaixados e 10 bois extras. c) $a \times 250 + b \times 50 + c$

2.3.3 Descreva algebricamente o que acontece em cada um dos casos: i) a qualquer, b qualquer e $0 \leq c \leq 4$ ii) a qualquer, $0 \leq b < 4$ e $c = 5$ iii) a qualquer, $b = 4$ e $c = 5$.

Problemas 2.5

2.5.1 27
2.5.2 $(abc)_{boi} = 250a + 50b + c$, sendo $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 4$ e $0 \leq c \leq 49$ números naturais. Uma limitação desse sistema é que ele não tem um conjunto finito de símbolos básicos. Os "dígitos" a, b e c têm que ser representados por um sistema de numeração auxiliar. Fica para o estudante descrever a regra geral do sucessor.
2.5.3 Não é 19.
2.5.4 A resposta da segunda pergunta não é 1550.
2.5.6 84
2.5.9 Comece escrevendo a representação algébrica expandida do número.
2.5.13 Aqui não estamos perguntando o nome das casas.
2.5.14 48, 49, 50, 51
2.5.15 16, 61, 106, 45
2.5.16 Algumas possibilidades de idéias que podem ocorrer: **a)** cento e vinte e cinco; **b)** 125 sapatos (ou, quem sabe, planetas, cada um na sua); **c)** algo mais que uma centena; **d)** uma centena, duas dezenas e cinco unidades; **e)** doze dezenas e cinco unidades; **f)** uma centena e um quarto de uma centena; **g)** faltam 25 para 150; **h)** 11 ao quadrado mais 4; **i)** dez dúzias mais cinco; **j)** 5×25; **k)** 5^3; **l)** 8.
2.5.17 180
2.5.20 25 e 76.

Problemas 2.7

2.7.2 Pode ser daqui ou de fora.
2.7.3 $(102)_{quatro}$. Você usou apenas a base quatro?
2.7.6 $(BA0)_{doze}$
2.7.7 Zero comparece $\beta + 1$ vezes, um, $2\beta + 1$ vezes, e cada um dos demais, 2β vezes.
2.7.8 a) $(10000)_{tres}$; b) $(22222)_{tres}$; c) $(20000)_{tres}$. Você usou apenas a base três?
2.7.9 Existem $\beta^{n-1}(\beta - 1)$ com n dígitos.
2.7.10 d) $(1110011000000111)_{dois}$
2.7.13 $256 = (100)_{dezesseis}$
2.7.14 $16777216 = (1000000)_{dezesseis}$ cores ou > 16 milhões aproximadamente.
2.7.15 Se $\beta > 10$ temos $(ab)_\beta = a\beta + b = a(10 + (\beta - 10)) + b = ...$

Problemas 2.12

2.12.3 $(1; 3; 5; 17)_{maia}$
2.12.6 2 de R$ 512,00, 3 de R$ 64,00, 2 de R$ 8,00 e 2 de R$ 1,00. As quantidades 2, 3, 2 e 2 são os dígitos da representação de 1234 na base oito.
2.12.8 $a = 2$ e $b = 8$
2.12.9 $\beta = 7$
2.12.12 $46 = (1201)_{três}$
2.12.13 b) $(1331)_\beta = ((11)_\beta)^3$ para todo $\beta \geq 4$, ou $(1000)_\beta = ((10)_\beta)^3$ para todo $\beta \geq 2$.
2.12.14 a) $109 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$; $5937 = 2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^0$; $71861 = 2^{16} + 2^{12} + 2^{11} + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$.
2.12.15 Já sabemos que $\beta^{m-1} \leq a < \beta^m$. Aplique $\log_\beta$ para achar m. Uma resposta é $m = \lfloor \ln(a)/\ln(\beta) \rfloor + 1$, em que ln é o logarítmo neperiano. Podemos ainda tomar a aproximação $m \approx \log_\beta(a)$. A notação $\lfloor x \rfloor$ indica o maior inteiro menor ou igual a x.
2.12.16 A base que proporciona menor gasto de tempo é $\beta = 2$.
2.12.18 $n10^n - 1_n + n + 1$, em que $1_n = 11 \ldots 1$ tem n algarismos iguais a 1.
2.12.19 1132

Problemas 3.2.4

3.2.4.1 $\overline{\text{V}}$CCCVII
3.2.4.3 Por exemplo, na adição de nove parcelas pode ocorrer "vai oito", ou menos.
3.2.4.4 A versão longa não evita o uso do "vai um".
3.2.4.7 O algoritmo usual imita o procedimento do ábaco, no qual é melhor começar com as unidades.

3.2.4.11 101060
3.2.4.12 $(360)_{sete}$, $(11316)_{sete}$, $(136511)_{sete}$.
3.2.4.13 $(11342)_{cinco}$, $(152053)_{oito}$, $(14925B)_{doze}$.

Problemas 3.3.3

3.3.3.1 CDLXXVI
3.3.3.3 $(52432)_{seis}$, $(55513)_{sete}$, $(62127)_{oito}$, $(110101)_{dois}$
3.3.3.4 $(537)_{oito}$

Problemas 3.4.1

3.4.1.1 a) V b) V c) V d) F
3.4.1.2 a) $a > b$; b) $c \leq d$.
3.4.1.3 Utilize a propriedade de compatibilidade entre a ordem e a adição.
3.4.1.4 Utilize a propriedade de compatibilidade entre a ordem e a adição.
3.4.1.5 Observemos que a primeira afirmação é a contrapositiva da segunda, portanto basta provar uma delas.
3.4.1.6 Aplique as identidades da Seção .
3.4.1.7 Aplique as identidades da Seção .
3.4.1.9 Use a definição de subtração.

Problemas 3.5.3

3.5.3.1 $(101101)_{dois}$, $(11111101010111)_{dois}$, $(2132022)_{quatro}$, $(1012223221)_{quatro}$, $(2022546026)_{sete}$.
3.5.3.3 Use o método egípcio. O resultado é MCCCXI.
3.5.3.11 Uma idéia é escrever cada número como soma de potências de 2 e depois multiplicar. Para simplificar use a identidade $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Problemas 3.6.3

3.6.3.4 $(11214)_{cinco}$ resto $(1)_{cinco}$; $(12412)_{cinco}$ resto $(22)_{cinco}$; $(100010)_{dois}$ resto 0; $(612)_{sete}$ resto $(32)_{sete}$; $(4126)_{doze}$ resto 2.
3.6.3.5 a) $(43)_{cinco}$; b) $(653)_{sete}$.

Problemas 3.8

3.8.5 Mostre que na base β podemos fazer a prova dos $\beta - 1$.
3.8.7 a) Restaram 4 grosas, 4 dúzias e 4 ovos. b) 5 grosas, 10 dúzias e 11 ovos; sobrarão 2 ovos.
3.8.8 Vale para bases β tais que $2 \leq \beta \leq 10$.
3.8.9 8
3.8.10 1 marc = 12 pinis e 1 drac = 9 marcs.
3.8.11 Descubra primeiro qual é a relação entre a unidade da representação decimal de n^5 com a unidade a_0 da representação decimal de n. Depois estude todos os casos $a_0 = 0$, $a_0 = 1$, ...
3.8.17 $d = 7$.
3.8.24 Um número natural menos a soma de seus dígitos resulta sempre um múltiplo de 9.
3.8.25 O octaedro tem oito faces, sendo que a cada face corresponde uma outra face oposta, isto é, ambas situadas em planos paralelos. Cada face é numerada de 1 a 8, com a propriedade de que o valor a de uma face e o valor a' da face oposta satisfazem $a + a' = 9$.
3.8.28 362880 e 201599999798400.
3.8.29 São $a \geq 2$ e $b \geq 2$ com $a > 2$ ou $b > 2$.
3.8.30 Uma idéia é dividir as n moedas em três grupos. Se $N(n)$ é a quantidade de pesagens então $N(n) \leq$ a quantidade de dígitos da representação ternária de n. Outra idéia é usar divisão por 2.

Problemas 4.2

4.2.1 Uma solução indutiva a título de exemplo. Somando os termos da primeira linha dá 15, que dividido por 5 dá o termo central da linha. Somando os termos da segunda linha dá 40, que dividido por 5 dá o termo central da linha. Induzimos que, em uma linha qualquer, se dividirmos a soma dos termos por 5 obteremos o termo central. Portanto, se em uma linha a soma é 665, o termo central é 665/5=133. Então os números da linha

procurada são 131, 132, 133, 134, 135. Notemos, por outro lado, que o último termo da primeira linha dividido por 5 dá 1, e o último termo da segunda linha dividido por 5 dá 2. Induzimos que, em uma linha qualquer, se dividirmos o último termo por 5 obtemos a ordem da linha. O último termo da linha encontrada é 135, que dividido por 5 dá 27. Portanto a linha encontrada tem a posição 27.
4.2.2 Quantos números tem a linha n? Qual o último número de cada linha? Quais são os números da linha n? Se $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, ... são os números da coluna do meio, o que é a_n?
4.2.3 a) $2k + 1$ b) $8k$ c) $k > 8$.

Problemas 4.4

4.4.2 a) Uma forma de justificar é usar o Método da Indução Completa. Outra forma, mais simples, é observar que, em qualquer progressão aritmética, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é constante e igual a $a_1 + a_n$. Chamando $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, calcule $2S$. c) Primeiro arrume uma forma de contar os termos da sequência.
4.4.3 a) *ii)* Ao usar a definição por soma $T_{20} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20 = 210$ somei os números um a um.
4.4.4 A figura sugere $Q_n = T_n + T_{n-1}$ para todo $n \geq 1$ (definindo $T_0 = 0$). Para demonstrar use a fórmula de T_n.
4.4.5 Usando gnômons sucessivos com 2, 4, 6, ... pontos percebemos que $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$. Para demonstrar use progressões aritméticas, ou algum resultado obtido anteriormente, ou o Método da Indução Completa.
4.4.8 Note que se $t = T_n$ então $9T_n + 1 = T_{3n+1}$. Para generalizar, observe que a sequência 9, 25, 49,... é formada pelos quadrados do ímpares. Que sequência é 1, 3, 6, ...?
4.4.9 Examine os casos 1^3, 2^3, 3^3, e induza uma fórmula. Demonstre em seguida.
4.4.10 a) Escreva P_n como a soma dos n termos de uma progressão aritmética.

Problemas 4.6

4.6.1 $b \neq 0 \Rightarrow a + b$ tem mais unidades do que a.
4.6.2 $n \times 0 = n \times (0 + 0) = \ldots$
4.6.3 Calcule $c(a - b) + cb$.
4.6.4 Chame $a - (b - c)$ de d e calcule $a + c$.
4.6.5 Sejam 0 e $0'$ antecessores de 1. Mostre que $0 = 0'$.
4.6.6 Dado $a^2 = a$ passe a para o outro lado. Use a Lei da Integridade.
4.6.7 Dado $ac = bc$ passe bc para o outro lado.
4.6.8 Dado $ab = a$ passe a para o outro lado.

Problemas 4.8

4.8.1 Da forma como está redigida, a definição de par coincide com a nossa. Por quê? Mas a de ímpar tem uma importante diferença. Qual é? Usando a definição dos pitagóricos mostre que: (i) o produto de um par por um número natural qualquer é par; (ii) a soma de dois ímpares quaisquer (eventualmente diferentes) é par.
4.8.2 Uma observação. Sejam $a = 2m$ e $b = 2n$ números naturais pares. Para fazer a subtração $a - b$ supomos que $a \geq b$. Mostre que isso implica que $m \geq n$ de modo que $t = m - n$ seja um número natural.
4.8.4 Uma dica. Mostre primeiro que a soma de números pares é par, qualquer que seja a quantidade de números.
4.8.6 Elabore uma justificativa geral usando notação algébrica.
4.8.8 Existe uma relação desse problema com o Problema 2.5.9.
4.8.10 Uma condição necessária e suficiente para que o produto $n_1 n_2 \cdots n_s$ termine em zero é que um dos números n_1, n_2, ..., n_s termine em zero ou que um deles seja par e outro termine em 5.
4.8.13 Expanda e simplifique $(n+1)^3 - n^3$ ou use 4.8.6.
4.8.16 $6n + 3$.
4.8.21 Divida os números por 3 e considere os casos: (i) existem três números com restos iguais; (ii) não existem três números com restos iguais.
4.8.24 Expanda $111\ldots1$ e note que $10^n = 2^n 5^n$.

Problemas 4.10

4.10.3 O melhor método que temos até agora para verificar a primaridade de um número $p > 2$ ímpar é: dividi-lo pelos números ímpares a tais que $1 < a < p$; se nehuma divisão for exata, p é primo.
4.10.4 Se $a + b = cq$ e $a = ct$ prove que $q \geq t$.

4.10.5 Dê um exemplo para mostrar que a hipótese $c \neq 0$ é necessária.
4.10.6 9 e 105.
4.10.7 Depois de 11 o menor primo dessa forma é 1111111111111111111 (19 dígitos 1's).
4.10.8 Use a definição de primo 4.19 da página 108.
4.10.9 n é par.
4.10.14 Existem quatro.
4.10.15 Escreva $n = ab$, com $a \geq b > 1$. Considere separadamente os casos $a = b$ e $a > b$.
4.10.16 Use que número 7^2 se escreve como um produto de dois números naturais de três maneiras (considerando também a ordem dos fatores). A resposta é $y = 24$ e $z = 25$.
4.10.19 Com até dois dígitos os únicos múltiplos de 50 são zero e 50. Com três dígitos ou mais são aqueles que terminam em 00 ou em 50.
4.10.20 Use que se $a - 7t = b$ então a é múltiplo de 7 se e somente se b é múltiplo de 7.
4.10.21 É claro que se um número natural é múltiplo de 6 então ele é múltiplo de 2 e de 3. Reciprocamente, seja a um número natural múltiplo de 2 e de 3. Por ser múltiplo de 3 temos $a = 3t$ para algum número natural t. O que podemos afirmar sobre t?

Problemas 4.12

4.12.1 Use classes módulo três.
4.12.3 m^n é par se e somente se m é par e $n \geq 1$. m^n é ímpar se e somente se $n = 0$ e $m \geq 1$ ou então se $n \geq 1$ e m é ímpar.
4.12.2 A palavra "exatamente" colocada no enunciado significa que um dos números é múltipo de 4 e o outro não é.
4.12.4 Em geral, quando se obtém uma fórmula algébrica através de uma figura ou de alguns exemplos particulares, se faz uma indução.
4.12.5 Primeiro induza uma fórmula examinando alguns números pentagonais. Em seguida faça uma verificação algébrica da fórmula. É possível também obter uma fórmula combinando fórmulas vistas no texto.
4.12.6 Escreva $2(T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n) = T_1 + (T_1 + T_2) + (T_2 + T_3) + \cdots + (T_{n-1} + T_n) + T_n$ e em seguida use 4.4.4 e 10.5.6. A soma é $n(n+1)(n+2)/3$.
4.12.7 Considerando que o n-ésimo conjunto tem n números, quantos números gastamos para escrever n conjuntos? Com isso você pode obter o último número do n-ésimo conjunto.
4.12.8 O que ocorre com a quantidade de pares e de ímpares na lousa depois de cada operação de substituição?
4.12.9 Suponha que exista a estrada retilínea adicional. A reta determinada por essa estrada divide o plano em dois semiplanos. Estude a localização das cidades nesses semiplanos.
4.12.10 Uma observação simples é que a soma dos números com sinal $-$ deve ser igual à soma dos números com sinal $+$. Ajuda?
4.12.11 Quantos botões trocam de cor a cada vez que se aperta um botão?
4.12.12 Uma dica é: faça uma troca por vez.
4.12.13 Também é impossível, mas o argumento precisa ser outro.
4.12.14 Não é possível. Para justificar use par e ímpar.
4.12.16 Uma solução é $7373 = 77^2 + 38^2$.
4.12.19 1000 não é possível, 1001 sim.
4.12.20 Pinte os cubinhos de branco e preto de forma conveniente, ou enumere-os de forma conveniente.
4.12.22 Para ver que A) $\Rightarrow$ B), se n é par considere $n - 2$, e se é ímpar, $n - 3$. Para ver que B) $\Rightarrow$ A), dado $n > 2$ par, aplique B) a $n + 2$. Foi demonstrada recentemente pelo matemático peruano Harald A. Helfgott a conjectura fraca de Goldbach, que estabelece que *Todo número natural ímpar* > 5 *é soma de três primos (não necessariamente diferentes)*

Temas para investigação 4.14

4.14.1 Examine alguns números representados na base três e procure regularidades relacionadas à sua paridade. Faça conjecturas gerais e as demonstre. Em seguida generalize os resultados para sistemas posicionais em qualquer base.
4.14.2 Observe regularidades nos restos e nos quocientes das divisões. Ache uma fórmula geral. Uma recíproca pode ser: Se o resto da divisão por 8 do quadrado de um número é 1, então o número é ímpar. O que se pode afirmar sobre $8t + 1$, em que t é um número triangular?
4.14.3 O dígito da unidade de um produto de números depende de que?
4.14.4 O que ocorre com a quantidade de pares e de ímpares na lousa depois de cada operação de substituição?

4.14.5 Como deve ser a soma dos números de 1 a n para que seja possível realizar o que foi pedido?
4.14.6 a) Depois de cada retirada e respectiva recolocação, o que ocorre com a paridade da quantidade de bolas de cada cor?
4.14.7 b) Dado n^3, qual é a forma do primeiro número que aparece na sequência de ímpares? E qual é a forma do último? Como podem ser somados os números dessa sequência? d) Existem muitas. Uma deles é o surpreendente Teorema de Nicômaco: para todo número natural n se tem $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$.
4.14.9 Considere separadamente números pares e ímpares.

Problemas 5.3

5.3.3 f) primo ou quadrado de um primo.
5.3.5 2520
5.3.6 128
5.3.7 a) são os múltiplos de 20; b) 25500
5.3.8 3000
5.3.10 vinte. Usando vários resultados anteriores observe primeiro que se n^2 é múltiplo de 3, 4 e 5 então n é múltiplo de 3, 2 e 5, portanto de 30.
5.3.11 8
5.3.14 Como 1 é raiz de $x^3 - 1$ então $x - 1$ é um divisor de $x^3 - 1$.
5.3.27 5832
5.3.18 Use que todo par > 2 é composto.

Problemas 5.5

5.5.1 a) primo; b) 3; c) primo; d) 13.
5.5.4 Existem cinco.
5.5.7 $(n-3)/2$

Problemas 5.7

5.7.1 c) A regularidade é que os primos obtidos em a) e em b) são os mesmos.
5.7.2 Existem 62 primos ≤ 300.
5.7.5 273 e 294 têm 8 divisores cada um.
5.7.6 288 tem 18 divisores.
5.7.7 Use o resultado do Problema Resolvido 5.3.

Problemas 5.9

5.9.5 Use que (i) todo número primo ímpar é de uma das duas formas seguintes: $4n+1$ ou $4n+3$; (ii) o produto de números da forma $4n+1$ ainda é desta forma; (iii) se a e b são números naturais tais que ab é múltiplo de 3, então a é múltiplo de 3 ou b é múltiplo de 3. Se $3 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são primos da forma $4n+3$, considere o número $4(p_1 \ldots p_k) + 3$. Prove que ele tem um divisor primo p da forma $4n+3$ diferente dos anteriores.

Problemas 5.11

5.11.5 1
5.11.14 21
5.11.15 37
5.11.16 Isto será provado no Capítulo 7 A relação que temos em mente é que os divisores comuns de a e b coincidem com os divisores de $\mathrm{mdc}(a, b)$. Para demonstrar use sucessivamente o algoritmo euclidiano aplicado a a e b. Confira o Capítulo 7.
5.11.17 7
5.11.20 O resultado que temos em mente é: "Se p e q são primos diferentes e se p divide tq, então p divide t, qualquer que seja o número natural t." Confira o Capítulo 7.
5.11.21 A propriedade que temos em mente é $\mathrm{mdc}(a, b)\,\mathrm{mmc}(a, b) = ab$.

Problemas 5.13

5.13.5 Apenas para $n = 1$.
5.13.6 Comece escrevendo $8 = 2^3$. Em seguida use a identidade 5.4.

5.13.8 Existem.
5.13.9 O resto é sempre 2.
5.13.10 Se $n \geq 2$ podemos afirmar que $a = 2$ e n é primo.
5.13.12 2 é o único primo que é soma de dois cubos.
5.13.13 2 é o único primo que é soma de de duas potências quínticas.

Problemas 5.15

5.15.1 $a = 5$ e $b = 4$.
5.15.2 Sete possibilidades. Para ajudar use uma tabela de primos.
5.15.3 15
5.15.5 Uma providência útil é aplicar o procedimento para alguns números p, por exemplo, $p = 7$ e $p = 35$.
5.15.6 Um jeito é usar o princípio das casas dos pombos.
5.15.7 Considere classes módulo 3.
5.15.8 $\mathrm{mdc}(84, 90) = 2 \cdot 3 = 6$, $\mathrm{mmc}(84, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$, $\mathrm{mdc}(1001, 4235) = 7 \cdot 11 = 77$, $\mathrm{mmc}(1001, 4235) = 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 = 55055$, $\mathrm{mdc}(20, 30, 14) = 2$ e $\mathrm{mmc}(20, 30, 14) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.
5.15.10 Essa variante pode não funcionar para três números (ou mais). Arrume um contra-exemplo.
5.15.15 Justifique por que se obtém a reposta com o uso do mdc.
5.15.18 3 voltas da engrenagem maior e 4 da menor.
5.15.19 Justifique por que o mmc fornece a reposta.
5.15.21 A diagonal intercepta uma vez cada uma das $n+1$ retas horizontais e uma vez cada uma das $m+1$ retas verticais. Entre duas interseções consecutivas a diagonal passa pelo interior de um quadrado unitário. Assim, a princípio seriam $n + 1 + m + 1$ interseções. Mas devemos subtrair as interseções comuns a uma linha vertical com uma linha horizontal, para que elas não sejam contadas duas vezes. Quantas são?
5.15.22 a) Use o resultado do Problema 5.3.24. b) Reexamine a solução de 5.3.25.
5.15.23 Apenas o primo 3 divide 3^j para $j > 0$. Suponha o contrário e, usando o resultado de 5.15.22 b) chegue a uma contradição.
5.15.24 Comece mostrando que todo número natural l se escreve na forma $l = 2^h 3^g b$ para números naturais h, g e b, sendo b não múltiplo de 2 e nem de 3.

Problemas 6.3

6.3.3 Se um número natural (em sua representação decimal) termina com 2, 3, 7 ou 8, podemos afirmar que ele não é um quadrado perfeito.
6.3.5 R
6.3.6 H
6.3.9 **a)** $n = 5q + 3$; **b)** Nenhum.

Problemas 6.5

6.5.2 Os sistemas de numeração aditivos estão definidos na Seção 1.6.

Problemas 6.6

6.6.1 Não.
6.6.3 Os pares.
6.6.4 Utilize classes módulo três.
6.6.7 Escreva $x = m + y$, sendo y um número real tal que $0 \leq y < 1$. Em seguida divida m por n.
6.6.8 b) $m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2\cdot 3} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2\cdot 5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{3\cdot 5} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2\cdot 3\cdot 5} \rfloor - 1$
6.6.9 Comece com a Proposição 5.22, página 146.
6.6.11 **a)** Use o Teorema do Algoritmo da Divisão. **b)** 20h22m3s; 17h30m26s; 21h52m51s; 1h39m25s.
6.6.12 $6^v 1^\circ 26' 21''$
6.6.13 a) Se $a = 2$, escreva $a = 3 - 1$, e esta é a forma requerida. Suponha $a \geq 3$. Seja $a = \tilde{q}_1 3 + \tilde{a}_0$, com $\tilde{a}_0 = 0$, 1 ou 2. Se $\tilde{a}_0 = 0$ ou 1 tome $a_0 = \tilde{a}_0$ e $q_1 = \tilde{q}_1$. Se $\tilde{a}_0 = 2$ tome $a_0 = -1$ e $q_1 = \tilde{q}_1 + 1$, e temos $a = q_1 3 - 1$. Em qualquer caso temos $a = q_1 3 + a_0$, com $a_0 = 1$, 0 ou -1. Prove que $q_1 < a$. Depois repita o processo para q_1, e assim sucessivamente.
6.6.14 Imite a demonstração do Teorema 6.7, página 160.

Problemas 7.3

7.3.7 São exatamente todos os primos ≤ 91.

7.3.16 Calcule $i!\binom{p}{i}$

Problemas 7.5

7.5.2 $m = 35$

7.5.8 a) Imite a demonstração do Teorema 4.22.

Problemas 7.7

7.7.1 2520
7.7.3 Use o Problema 7.5.3.
7.7.6 Relativamente primos dois a dois.
7.7.8 Use 7.2 e 7.18.

7.7.12 Use 7.18, 7.3.12 e 7.7.9.

Problemas 7.9

7.9.1 Use um aplicativo computacional algébrico. Ou calcule os divisores, por exemplo,
$\mathcal{D}(8128) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128\}$.

7.9.2 Use um aplicativo computacional algébrico.

Problemas 7.10

7.10.2 9
7.10.6 1
7.10.7 Use 5.21 e 7.3.16.
7.10.8 Use 5.21 e 7.3.16.
7.10.9 Proceda por contradição.
7.10.10 Considere um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que um vértice do retângulo seja $(0,0)$ e o outro, (a,b). Tome a diagonal por esses dois pontos. Escreva $d = \text{mdc}(a,b)$, $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$.

7.10.11 O número do armário deve ser um quadrado perfeito para que tenha um número ímpar de divisores.

Problemas 8.3

8.3.2 $(0,t,t)$ e $(t,0,t)$, para todo número natural t.
8.3.3 **d)** Se $r = m/n$ temos $v = (m^2 - n^2)/2mn$ e $w = (m^2 + n^2)/2mn$. Se $m > n > 0$ obtemos o terno pitagórico $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.

8.3.5 **a)** $(5, 12, 13)$. **b)** $(3, 4, 5)$ e $(7, 24, 25)$. **c)** $(n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2)$. **d)** $(n, (n^2 - 4)/4, (n^2 + 4)/4)$.

Problemas 8.5

8.5.2 Os casos possíveis são três.
8.5.3 Para mostrar que xy é múltiplo de 3 use classes módulo 3 e que nenhum quadrado é da forma $3k + 2$.

8.5.4 Seja $(x, y, z) = (2kmn, k(m^2 - n^2), k(m^2 + n^2))$. Se m ou n é múltiplo de 5 então $5 \mid x$. Caso contrário, $m^2 = 5l + 1$ ou $m^2 = 5l - 1$, o mesmo para n^2. Examine todos os casos.

Problemas 8.7

8.7.3 Note que $x = (n+1)/2$ e $y = (n-1)/2$ constituem uma solução de $x^2 - y^2 = n$. Suponha que $n = ab$ seja composto. Então $x = (a+b)/2$ e $y = (a-b)/2$ são números naturais e constituem uma solução de $x^2 - y^2 = n$ diferente da anterior. Reciprocamente, suponha que a equação dada tenha mais de uma solução. Seja $(c,d) \neq ((n+1)/2, (n-1)/2)$ uma segunda solução. Como $n = (c+d)(c-d)$, prove que $c - d > 1$.

Problemas 9.4

9.4.4 Examine oito casos, conforme cada um dos números a, b ou c esteja ou não em $\mathbb{N}$.
9.4.5 Examine oito casos, conforme cada um dos números a, b ou c esteja ou não em $\mathbb{N}$.
9.4.6 Examine quatro casos, conforme cada um dos números a ou b esteja ou não em $\mathbb{N}$.

9.4.9 Examine quatro casos, conforme cada um dos números a ou b esteja ou não em $\mathbb{N}$.

Problemas 9.8

9.8.1 $n = -15$, $m = -73$. O mdc é 19.
9.8.3 a) 1; b) 1 ou 17.
9.8.4 $x = 2 \cdot 3^2$ e $y = 2^3 3^2$ ou o contrário.
9.8.6 $m = 1125$
9.8.7 1

Problemas 9.9

9.9.1 2^9 ou 2^{12}
9.9.2 p^6

Problemas 10.3

10.3.1 Para verificar que $7 \mid n^7 - n$ uma forma é escrever $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$ e considerar os casos $n = 7k + r$, $0 \leq r < 7$.
10.3.2 Use um aplicativo computacional algébrico.
10.3.3 Use um aplicativo computacional algébrico.

Problemas 10.5

10.5.9 Para descobrir a fórmula, proceda indutivamente. Suponhamos que na sala exista uma pessoa. Então $n = 1$, e a quantidade $c(1)$ de cumprimentos é 0. Se $n = 2$, temos $c(2) = 1$. Prossiga.

Problemas 10.7

10.7.2 Pode-se utilizar o Segundo Princípio da Indução Completa, ou então, o Primeiro, observando que $f_{4(n+1)} = 3f_{4n+1} + 2f_{4n}$.

Problemas 10.8

10.8.3 Use $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n}3^2 - 3^2 + 3^2 - 1$
10.8.9 Um resultado importante chamado de "Pequeno"! (*Sugestão*: Seja p um primo e considere a seguinte afirmação $A(a)$: para todo número natural a se tem $p|(a^p - a)$. Depois de demonstrar $A(a)$ para todo $a \geq 0$ considere a negativo.)

Problemas 11.5

11.5.2 $(x, y) = (10 - 29t, 1 - 3t)$.
11.5.3 5, 3 e 33.
11.5.4 2, 30 e 68, e mais outras seis soluções.
11.5.5 9 e 71, ou 30 e 40, ou 51 e 9.
11.5.6 18.
11.5.7 $(x, y) = (-1500 + 5t, 1000 - 3t)$ para $300 \leq t \leq 333$. O custo pode ser constante, ou mínimo para as quantidades de 0 e 100 ou 165 e 1.
11.5.8 $100 = 7 \cdot 8 + 11 \cdot 4$.

Apêndice C

Créditos das figuras

Observação: As figuras não referidas foram construídos pelo autor com o uso do programa gráfico vetorial Inkscape ou com o Pictex ou o Tikz.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Construída pelo autor com o Inkscape.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 1: A arte de contar

Figura da página 5: Clip Art vetorial disponibilizada em http://all-free-download.com/free-vector/download/a-variety-of-clip-art-books_155211.html Consultado em 10 de agosto de 2016.

Figuras da página 6: Clip Art vetorial disponibilizada em http://http://publicdomainvectors.org/pt/ Consultado em 14 de setembro de 2016.

Figura 1.1, página 12: Detalhe do papiro de Rhind obtido em https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus#/media/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg Autor: Paul James Cowie (Pjamescowie). Data: 21 de maio de 2006. Fotografia e texto de domínio público. Consultado em 15 de agosto de 2016.

Símbolos da Seção 1.7, pág. 12: Os desenhos dos símbolos numéricos áticos e jônicos foram obtidos da página *Greek numerals* em https://en.wikipedia.org/wiki/Greek_numerals e disponibilizados para domínio público por *Future Perfect at Sunrise* em 14 de julho de 2012. Consultado em 16 de agosto de 2016.

Figura 1.2, página 13: Foto de manuscrito grego do Século II obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Lund,_Inv._35a.jpg O papiro se encontra na Lund University Library e foi escaneado do livro *The Exact Sciences in Antiquity* de Otto E. Neugebauer [76]. Domínio público. Consultado em 17 de agosto de 2016.

Figura 1.3, página 14: Foto de relógio hebreu do Século XX adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pocket_watches_with_Hebrew_numerals.JPG Museu Judaico de Berlim. Disponibilizado em 24 de janeiro de 2015 como domínio público. Consultado em 17 de agosto de 2016.

Figura 1.4, página 15: Foto disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/File:Carlos_IV_Coin.jpg Disponibilizada em 15 de janeiro de 2007 por Coinman62 como domínio público. Consultado em 17 de agosto de 2016.

Figura 1.5, página 16: Foto de tablete cretense obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cretan_hieroglyphs2.png Autor: Y-barton. Data: 2 de dezembro de 2013. Direitos de imagem de acordo com o sistema Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0. Consultado em 14 de agosto de 2016.

Foto da página 18: Recorte de foto de uma estátua de Jean Piaget obtida de http://www.picswiss.ch/Genf/GE-05-07.html Os direitos autorais são de propriedade do fotógrafo Roland Zumbühl. Permitido uso privado não comercial. Consultado em dezembro de 2010.

Capítulo 2: Sistemas de numeração posicionais

Figura 2.1, página 23: A lousa do desenho foi disponibilizada em http://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Quadro-negro-vetor-clip-art/11718.html Consultado em 27 de setembro de 2016.

Figura 2.2, página 28: Foto obtida de *Article for abacus, 9th edition Encyclopedia Britannica, volume 1 (1875)*, digitalizada por Malcolm Farmer e disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Abacus_6.png Domínio público. Consultado em 17 de outubro de 2016.

Figura 2.3, página 34: Parte de manuscrito de Gottfried W. Leibniz alocado na Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek, Hannover, e disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leibniz_binary_system_1697.jpg Domínio público. Consultado em 21 de setembro de 2016.

Figura , página 38: Fotografia de tablete sumério depositado na *Yale Babylonian Collection's Tablet YBC 7289* http://nelc.yale.edu/ A fotografia é de Bill Casselman http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html e disponibilizada em 25 de maio de 2007 no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-bw.jpg. Permissão de uso sob os termos de *GNU Free Documentation License* /en.wikipedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License

Figura 2.5, página 39: Desenho de inscrição Khmer mostrando o numeral 605. Obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Khmer_Numerals_-_605_from_the_Sambor_inscriptions.jpg Disponibilizado pelo autor Paxse em 11 de janeiro de 2009 e licenciado sob licença *Creative Commons Attribution-Share Alike*. Consultado em 21 de setembro de 2016.

Figura , página 40: Detalhe do livro de Datta, B. e Singh, A. N. *History of Hindu mathematics, a source book*. Lahore, Motilal Banarsi Das, 1935, págs. 105 a 121. Obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Numeration-brahmi_fr.png Disponibilizado por Piero em 17 de fevereiro de 2010 sob domínio público. Consultado em 21 de setembro de 2016.

Capítulo 3: A arte de calcular

Figura 3.2, página 69: Antiga tábua de multiplicação chinesa, datada de 446-221 a. C. depositada na Tsinghua University. Disponibilizado em 13 de março de 2014 no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Qinghuajian,_Suan_Biao.jpg Domínio público. Consultado em 26 de setembro de 2016.

Capítulo 4: O ideal matemático da Antiga Grécia

Figura 4.1, página 91: Mapa mostrando os territórios gregos e colônias na época do Período Arcaico. Disponibilizado em 30 de março de 2014 pelo autor Regaliorum no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Greek_Colonization_Archaic_Period.png Domínio público. Consultado em 4 de dezembro de 2016.

Figura , página 95: Recorte do quadro *Escola de Atenas*, de Rafael Sanzio, disponibilizado em http://christusrex.org/www1/stanzas/S2-Segnatura.html Domínio público. Consultado em 12 de março de 2002.

Figura 4.3, página 100: Foto de estátua de Nicômaco de Gerasa, situada na cidade de Nuremberg, Alemanha. Disponibilizada por MatthiasKabel em 3 de outubro de 2010 em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Schoener_Brunnen_detail_blur.jpg sob *GNU Free Documentation License*. Consultado em 9 de dezembro de 2016.

Figura 4.5, página 112: Desenho cotado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Theon_of_Smyrna.html Sem informações sobre direitos autorais. Consultado em 17 de janeiro de 2017.

Figura 4.6, página 115: Foto de Srinivasa I. Ramanujan , genial matemático hindu. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Srinivasa_Ramanujan_-_OPC_-_1.jpg sob domínio público. Consultado em 26 de janeiro de 2017.

Figura 4.7, página 116: Foto de estátua de Aryabhata, situada no Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), na Universidade de Pune, Índia. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2064_aryabhata-crp.jpg sob domínio público. Consultado em 17 de janeiro de 2017.

Figura 4.8, página 122: Foto de pintura de autoria de Christian Albrecht Jensen retratando Johann Carl Friedrich Gauss. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss_

1840_by_Jensen.jpg sob domínio público. Consultado em 21 de janeiro de 2017.

Capítulo 5: Números primos e compostos

Figura 5.1, página 134: Eratóstenes de Cirene. Imagem disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portrait_of_Eratosthenes.png Domínio público. Consultado em 6 de novembro de 2016.

Figura 5.2, página 139: Euclides de Alexandria. Imagem disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg Domínio público. Consultado em 5 de novembro de 2016.

Figura 5.3, página 142: Digitalização da capa da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa de *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, datada de 1570. Imagem disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Title_page_of_Sir_Henry_Billingsley's_first_English_version_of_Euclid's_Elements,_1570_(560x900).jpg Domínio público. Consultado em 6 de novembro de 2016.

Referências Bibliográficas

[1] Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] Aczel, A. D., *Fermat's Last Theorem. Unlocking the secret of an ancient mathematical problem.* New York, Four Walls Eight Windows, 1996.

[3] Allenby, R. B. J. T. e Redfern, E. J., *Introduction to Number Theory with Computing.* London, Edward Arnold, 1989.

[4] Atkin, A. O. L. e Birch, B. J., *Computers in Number Theory.* London, Roystar Printers, 1971.

[5] Barbeau, E. J., Klamkin, S. e Moser, W. O. J., *Five Hundred Mathematical Challenges.* Washington, The Mathematical Association of America, 1995.

[6] Barnett, I. A., *Elements of Number Theory.* Boston, Prindle, Weber & Schimidt, 1969.

[7] Bezuszka, S. J. e Kenney, M. J., *Challenges for enriching the curriculum: Arithmetic and Number Theory.* Mathematics Teacher, vol. 76, nº 4, 1983.

[8] Blum, M., *Home Page.* `http://www.cs.berkeley.edu/~blum/` Consultado em 30 de maio de 2008.

[9] Bogoshi, J. *et alii*, *The oldest mathematical artifact.* Math. Gazette, 71:458 (1987) 294.

[10] Brandreth, G., *Number Play.* New York, Rawson Associates, 1984.

[11] Boyer, C. B., *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[12] Brutlag, D., *Making Your Own Rules.* Mathematics Teacher, vol. 83, nº 8, 1990, págs. 608 a 611.

[13] Bueno, A., *Olavo Bilac, Obra Reunida.* Rio de Janeiro, Editora Nova Aguillar, 1997.

[14] Burton, D. M., *Elementary Number Theory.* Boston, Allyn and Bacon, 1976.

[15] Caldwell, C. e Honaker, G. L., *Prime Curios!.* `http://primes.utm.edu/curios/` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[16] Cardoso, M. L. e Gonçalves, O. A., *Uma interpretação geométrica do* mmc. Revista do Professor de Matemática, nº 32, 3º quadrimestre de 1996, págs. 27 a 28.

[17] Carroll, L., *Alice Through the Looking Glass.* `http://www.cs.indiana.edu/metastuff/dir.html` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[18] Chapman, R., *A Guide to Arithmetic.* `http://www.maths.ex.ac.uk/~rjc/notes/arith.pdf` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[19] Chevalier, J. e Gheerbrant, A., *Dicionário de Símbolos.* Tradução de Silva, V. C., *et alii.* 12ª edição. Rio de Janeiro, Editora José Olympio. Data da edição original: 1982.

[20] Childs, L., *A Concrete Introduction to Higher Algebra.* Springer Verlag, 1992.

[21] CONMETRO, *Resolução nº 12/88.* `http://www.inmetro.gov.br/` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[22] Coutinho, S. C., *Números Inteiros e Criptografia.* Série de Computação e Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática e Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.

[23] Cunha, C. F., *Gramática da Língua Portuguesa.* Rio de Janeiro, Ministério da Educação, 1990.

[24] Crump, T., *The Anthropology of Numbers.* Cambridge University Press, 1990.

[25] Datta, B. e Singh, A. N. *History of Hindu mathematics, a source book.* Lahore, Motilal Banarsi Das, 1935.

[26] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers.* New York, Chelsea Publ. Comp., 1952.

[27] Domingues, H. H., *Fundamentos de Aritmética.* São Paulo, Atual Editora, 1991.

[28] Duarte, N., *O Ensino da Matemática na educação de adultos.* São Paulo, Cortez Editora, 1986.

[29] Dumont, I., *Elementos de Aritmética.* Livraria Francisco Alves.

[30] Ebbinghaus, H.-D. *et alii*, *Numbers.* New York, Springer Verlag, 1991.

[31] Edwards, H. M., *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory.* New York, Springer Verlag, 1977.

[32] Eels, W. C., *Number Systems of the North American Indians.* American Mathematical Monthly, vol. XX, nº 10, 1913, págs. 293 a 299.

[33] Escultura, E., *A number trick explained with Algebra.* Mathematics Teacher, vol. 76, nº 1, 1983.

[34] Euler, L, *Elements of Algebra.* New York, Springer Verlag, 1984.

[35] Eves, H., *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas, Editora UNICAMP, 2004.

[36] Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) `http://www.inep.gov.br/superior/enade/` Consultado em 04 de março de 2008.

[37] Ferreira, A. B. H., *Novo Dicionário da Língua Portuguesa.* 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, 1986.

[38] Fraenkel, A. S., *Systems of Numeration.* American Mathematical Monthly, vol. 92, nº 2, 1985, págs. 105 a 114.

[39] Gauss, C. F., *Disquisitiones Arithmeticae.* New York, Springer Verlag, 1986.

[40] Glaser, A., *History of Binary and Other Nondecimal Numeration.* Tomash Publishers, 1981.

[41] Graham, R. L., Knuth, D. E. e Patashnik, O., *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, 1990.

[42] *Greek numerals.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Greek_numerals` Consultado em 16 de agosto de 2016.

[43] Grosso, C., *O número 12.* Revista do Professor de Matemática, nº 67, 3º quadrimestre de 2008, págs. 14 e 15.

[44] Heath, T. L., *A Manual of Greek Mathematics.* New York, Dover Publications, 1963.

[45] Hefez, A., *Elementos de Aritmética.* Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[46] Honsberger, R. (ed.), *Mathematical Gems.* vol. I, II e III. Mathematical Association of America, 1973.

[47] Houaiss, *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.* 1ª edição. Rio de Janeiro, Objetiva, 2001.

[48] Ifrah, G., *Os Números, história de uma grande invenção.* Tradução de Senra, S. M. F. 3ª edição. São Paulo, Editora Globo, 1989.

[49] Ignatiev, E. J., *En el Reino del Ingenio.* Moscou, Editorial Mir, 1986.

[50] Kamii, C. e DeClark, G., *Reinventando a Aritmética (implicações da Teoria de Piaget).* Tradução de Curt, E. *et alii.* Campinas, Papirus Editora, 1994.

[51] Kamii, C. e Joseph, L. L., *Aritmética, Novas Perspectivas.* Tradução de Lellis, M. C. T. *et alii.* Campinas, Papirus Editora, 1995.

[52] Kamii, C., *A Criança e o Número.* Tradução de Assis, R. A. 39ª edição. Campinas, Papirus Editora, 1995.

[53] Karpinski, L. C., *The History of Mathematics.* New York, Russel & Russel, 1965.

[54] Kato, K., Kurokawa, N. e Saito, T., *Number Theory 1, Fermat's Dream.* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 2000.

[55] Kirch, A. M., *Elementary Number Theory: a Computer Approach.* New York, Intext Educational Publishers, 1974.

[56] Lang, S., *Undergraduate Algebra.* New York, Springer Verlag, 1987.

[57] LeVeque, W. J., *Fundamentals of Number Theory.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1977.

[58] Liwer, A., *Don't regroup.* Arithmetic Teacher, Reston, vol. 37, nº 7, pág. 2, março de 1990.

[59] Long, C. T., *Elementary Introduction to Number Theory.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987.

[60] Lopes, J. J., *Vejam o que o Adriano aprontou!* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº 18, 1º semestre de 1991, págs. 21 a 23.

[61] Lorenzato, S., *Educação infantil e percepção matemática.* Campinas, Editores Associados, 2006.

[62] Lovász, L., Pelikán, J. e Vesztergombi, K., *Matemática Discreta.* Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[63] Lucas, *Evangelho segundo São Lucas. in* Bíblia Sagrada. São Paulo, Editora Ave Maria, 1991.

[64] Mandarino, M. C. F. e Belfort, E., *Números Naturais - Conteúdo e Forma.* Matemática nas Séries Iniciais - Parte I. Rio de Janeiro, Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e das Ciências, UFRJ, 2005.

[65] *Mathematics.* `http://math.stackexchange.com/` Consultado em novembro de 2016.

[66] Mathematics Teacher. Reston, National Council of Teachers of Mathematics. Seção *Calendar Problems* de vários fascículos.

[67] Mega, E. e Watanabe, R., *Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª a 8ª* São Paulo, Editora Núcleo e Sociedade Brasileira de Matemática, 1988.

[68] Merrill, H. A., *Mathematical Excursions.* New York, Dover Publications, 1933.

[69] MIT, *Problems on congruences and divisibility.* 2002. `http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-S34Fall-2004/DownloadthisCourse/index.htm` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[70] Moise, E. E., *The Number Systems of Elementary Mathematics.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[71] Monteiro, L. H. J., *Elementos de Álgebra.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo e Ao Livro Técnico, 1969.

[72] Nacarato, A. M., *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.* Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2009.

[73] Nery, C. e Possani, C., *Os Primos Esquecidos.* Revista do Professor de Matemática, nº 47, 3º quadrimestre de 2001, págs. 16 a 20.

[74] Nery, C., *Ensino, logo aprendo.* Revista do Professor de Matemática, nº 70, 3º quadrimestre de 2009, págs. 17 a 22.

[75] Neugebauer, O. E. e Sachs, A. J., (eds) *Mathematical Cuneiforms Texts.* New Haven, American Oriental Society, 1946, American Oriental Series, vol. 29.

[76] Neugebauer, O. E., *The Exact Sciences in Antiquity.* Princeton, Princeton University Press, 1952; 2nd edition, Brown University Press, 1957; reprint, New York: Dover publications,

[77] Nicolai, R., *Algumas técnicas operatórias.* Revista do Professor de Matemática, nº 8, 1º semestre de 1986, págs. 42 a 45.

[78] O'Connor, J. J. e Robertson, E. F. *A history of Zero.* `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Zero.html` Consultado em 8 de dezembro de 2016.

[79] Ogilvy, C. S. e Anderson, J. T., *Excursions in Number Theory.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987. New York, Oxford University Press, 1966.

[80] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) `http://www.obmep.org.br` Consultado em 04/03/2008.

[81] Oliveira, Z. C., *Uma interpretação geométrica do* mdc. Revista do Professor de Matemática, nº 29, 3º quadrimestre de 1995, págs. 24 a 26.

[82] Ore, O., *Invitation to Number Theory.* New York, Random House, 1967.

[83] Paterlini, R. R., *O ensino da Aritmética em cursos de Licenciatura em Matemática.* `http://www2.dm.ufscar.br/Hp_2001/hp591/hp591001/hp591001.html` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[84] Paterlini, R. R., *O que é o Método Genético para o ensino da Matemática.* `http://www2.dm.ufscar.br/Hp_2001/hp400/hp400.html` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[85] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números reais.* São Carlos, UFSCar, 2008. `http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/` Consultado em 20 de janeiro de 2008.

[86] Polezzi, M., *Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?* Revista do Professor de Matemática, nº 51, 2º quadrimestre de 2003, págs. 29 a 31.

[87] Pedoe, D., *The Gentle Art of Mathematics.* New York, Dover Publications, 1958.

[88] Pereira, A. L. e Watanabe, R., *Leitura de números grandes.* Revista do Professor de Matemática, nº 57, 2º quadrimestre de 2005, pág. 59.

[89] Pérez, J. A. S., *La Aritmetica en Roma en India y en Arabia.* Madrid, Instituto Miguel Asín, 1949.

[90] Piaget, e Szeminska, A., *A Gênese do Número na Criança.* Tradução de Oiticica, C. M. Segunda edição. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1975.

[91] Pisa, Programa Internacional de Avaliação de Alunos. `http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/oquee.htm` Consultado em 20 de janeiro de 2008..

[92] Revista do Professor de Matemática. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática. Seção *Problemas* de diversos números. Seção *Cartas* de diversos números.

[93] Ribenboim, P., *Números Primos: mistérios e recordes.* Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

[94] Robertson, J. I., *How to do Arithmetic.* American Mathematical Monthly, nº 86, 1979, págs. 431 a 439.

[95] Rosen, K. H., *Elementary Number Theory and its Applications.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[96] Rothbart, A. e Paulsell, B., *Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas.* Revista do Professor de Matemática, nº 7, 1º semestre de 1985, págs. 49 a 51.

[97] Roxo, E., *Lições de Arithmetica.* Livraria Francisco Alves, 1926.

[98] Santos, A. L., Wagner, E. e Agostino, R. F. W., *Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro.* São Paulo, Atual Editora e Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[99] Santos, J. P. O., *Introdução à Teoria dos Números.* Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

[100] Shakespeare, W., *Taming of the Shrew.* `http://www.shakespeare-literature.com/` Consultado em 20 de janeiro de 2008..

[101] Shoemaker, R. W., *Patterns in Powers of Digits.* Mathematics Teacher, vol. 81, nº 4, 1988.

[102] Sierpinski, W., *250 Problems in Elementary Number Theory.* New York, American Elsevier Publishing Company, 1970.

[103] Smith, D. E., *History of Mathematics.* volumes I e II. New York, Dover Publications, 1958.

[104] Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics.* 3ª edição. New York, Dover Publications, 1967.

[105] Tao, T., *Como Resolver Problemas Matemáticos.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[106] Thiré, C., *Questões de Arithmetica.* Rio de Janeiro, Pimenta de Melo, 1925.

[107] Toeplitz, O., *The Calculus, a Genetic Approach.* Chicago, The University Press, 1963.

[108] Vinogradov, I. M., *Elements of Number Theory.* New York, Dover Publications, 1954.

[109] Zazkis, R. e Campbell, S. R. (ed.), *Number Theory in Mathematics Education.* New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 2006.

[110] Zunino, D. L., *A Matemática na Escola: Aqui e Agora.* Tradução de Llorens, J. A. Porto Alegre, Artmed Editora, 1995.

[111] Waerden, B. L. van der, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin, Springer Verlag, 1983.

[112] Wagner, E., *Paridade.* Cubo Matemática Educacional, vol. 1, junho 1999, págs. 10 a 15.

[113] Walle, J. A. Van de, *Matemática no Ensino Fundamental.* Tradução de Colonese, P. H. Porto Alegre, Artmed Editora, 2009.

[114] Weil, A., *Number Theory for Beginners.* Berlim, Springer Verlag, 1979.

[115] Weil, A., *Number Theory An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Berlim, Springer Verlag, 1979.

[116] Wolf, A. P., *Meus Problemas.* São Paulo, Editora Saraiva, 1947.

Índice de nomes próprios

Adelardo de Bath (c. 1075-1160), 40
África, 10
al-Khowarizmi (c. 825), 40
Alcuin de York (735-804), 220
Alexandria, 91, 134, 179
Antiga Grécia, 91, 112, 138
Antropologia, 8
Aramaico, 17
Aristoxenus (Século IV a. C.), 91
Aryabhata (c. 475-550), 116, 236
Austrália, 8

Bachet, G. (1581-1638), 220
Bagdá, 39
Bernoulli, N. (1687-1759), 214
Bhaskara (1114-1185), 98
Bilac, O. B. M. G. (1865-1918), 41
Brahmagupta (598-670), 98

Cantor, G. (1845-1918), 34
Carrol, L. (1832-1898), 3
Checoslováquia, 7
Ciência da Computação, 34, 36
CONMETRO, 45
Creta, 6

De Moivre, A. (1667-1754), 214
Diofanto (c. 250), 185, 217
Dirichlet, P. G. L. (1805-1859), 139

Edwards, H. M. (1936 -), vi
Eels, W. C., 10
Epistemologia Genética, 5, 19
Eratóstenes (c. 230 a. C.), 134
Escola
    Pitagórica, 91, 95, 99, 109, 112, 149, 180
    Platônica, 91, 180
Espanha, 40
Etnologia, 8
Euclides (c. 300 a. C.), 91, 138–141, 175, 179, 181
Euler, L. (1707-1783), 96, 185, 186, 203, 219, 220
Europa, 14, 15, 40

Fermat, P. (1601?-1665), vi, 37, 176, 185, 203, 212
Fibonacci, ou Leonardo de Pisa (1170-1250), 40, 210, 211, 214, 215

Gauss, J. C. F. (1777-1855), 122, 236
Gillies, D. B. (1928-1975), 35
Goldbach, C. (1690-1764), 118
Grave, D. A. (1863-1939), 204

Heath, T. L. (1861-1940), 96
Helfgott, H. A. (1977, ...), 229
Hermite, C. (1822-1901), 139
Heron (c. 75), 186
Hindus, 217, 218
Hipacia de Alexandria (c. 350 - 415), 13
Hiparcos (c. 190 - c. 120 a. C.), 13
Horácio Flaco (65-08 a. C.), 99

Ilhas Murray, 8, 10, 17
Índia, 116, 182, 213, 236

Jensen, C. A. (1792–1870), 236

Kamiraloi, 9, 17
Korselt, A. R. (1864-1947), 177
Kronecker, L. (1823-1891), 184
Kummer, E. E. (1810-1893), 139

Lévy-Brühl (1857-1939), 10
Leibniz, G. W. (1646-1716), 34, 204, 236
LIBRAS, 6, 20
Linguagem Brasileira de Sinais, 6, 20
Lucas, F. E. A. (1842-1891), 211, 213, 214

Madagáscar, 22, 24
Mahavira (c. 800-870), 98
Maurolico, F. (1494-1575), 208
Mersenne, M. (1558-1648), 35, 154, 175
Mesopotâmia, 37

Neugebauer, O. E. (1899 - 1990), 235
Newton, I. (1643-1727), 145
Nicômaco (c. 100), 99, 100, 121, 175, 230, 236
Nova Guiné, 8, 10

Os Elementos, 91, 141, 175, 181

Pacioli, L. (1445-1517), 73
Paraguai, 10
Pascal, B. (1623-1662), 208
Peano, G. (1858-1932), 194
Piaget, J. (1896-1980), 5, 18
Pitágoras (c. 585-500 a. C.), 91, 95, 107, 179, 180
Platão (c. 428-348 a. C.), 112
Proclus (410-485), 91, 180, 208
Ptolomeu, C. (c. 100 - c. 170), 13

Ramanujan, S. I. (1887-1920), 115, 122, 236
Recorde, R. (c. 1510-1558), 55
Rhind, A. H. (1833–1863), 12
Rio Murray, 17

Sanzio, R. (1483-1520), 95, 236
Shakespeare, W. (1564-1616), 3
Siríaco, 17
Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI), 45
Sumérios, 179

Theon de Alexandria (c. 335 - c. 405), 13
Theon de Smyrna (c. 70-135), 112
Toeplitz, O. (1881-1940), vi

UFSCar, v, vi, 2, 103

Wiles, A. (1953 -), 185

Zermelo, E. F. F. (1871-1953), 177

Índice de assuntos

$(d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0)_\beta$, 31
$(d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0)_{dez}$, 27
$\div$, 80
$\lfloor x \rfloor$, 158
$\mathbb{N}$, 98
$\mathbb{N}^*$, 98
$\mathbb{Z}_+$, 190
$\mathbb{Z}_-$, 190
σ, 171
τ, 171
$\{a \mid c\}$ (conjunto dos elementos a que cumprem a condição c), 196
$\{\ \}$, conjunto, 98
a^n, 67
$b \mid a$ (b divide a), 195
$b \nmid a$ (b não divide a), 195

ábaco, 22, 24
adição, 50, 190
adicionar, 51
algarismos, 11
  decimais, 26
  hindu-arábicos, 26
algoritmo euclidiano, 141
análise
  método, 107
Aritmética, 91
  gênese da, 91, 107
axiomas de Peano, 194

balança de dois pratos sem escala, 85

calcular
  a diferença, 59
  a soma, 51
  o produto, 67
  o quociente e o resto, 75
classes de restos de dois, 100
classes de restos de três, 103
classes módulo
  cinco, 106
  dois, 100
  n, 104, 198
  quatro, 104, 106
  três, 103, 106
combinação linear, 108
compatibilidade entre a ordem e a adição, 64
compatibilidade entre a ordem e a multiplicação, 64
conjunto
  limitado inferiormente, 194
  limitado superiormente, 194
  mínimo, 194
  máximo, 194
contar, 5
  a arte de, 3, 21
coprimos, 141, 197
critério de divisibilidade
  por cinco, 113
  por dez, 113
  por dois, 102
  por nove, 146
  por onze, 148
  por quatro, 113
  por seis, 113
  por sete, 113
  por três, 146
crivo de Eratóstenes, 131, 134
cuneiforme, 37

decomposição em fatores primos, 109
dedução, 91, 92
definição por recorrência, 94, 97
diferença, 58, 191
dígitos, 27, 31
divide, 107, 195
divisão, 73, 190
divisor, 107, 195

efetuar, 51
ensino da Matemática
  através de problemas, v
  método genético, vi
equação diofantina linear, 217, 219, 221

fator, 107, 195
fatorial de um número, 34, 119

gnômon, 94, 180

identidades algébricas, 145
igual, 64
indução, 92

kuttaka, 217, 218

Lei da Tricotomia, 64, 193
Lei de Integridade, 98, 193
Leis de Cancelamento, 64, 65, 99, 193
limitante inferior, 194
limitante superior, 194
linguagem
  de sinais, 3, 6
  de sinalização marítima, 6
  pictográfica, 3, 6, 15
  simbólica, 3, 6

maior do que, 64
maior número natural $\lfloor x \rfloor$, 158
máximo divisor comum, 140, 196
menor do que, 64
Método da Indução Completa, 203
mínimo múltiplo comum, 142, 196
multiplicação, 65, 190
múltiplo, 107, 195

numeral, 6
  cardinal, 41
  classificação, 41
  fracionário, 44
  multiplicativo, 44
  ordinal, 42
número
  automórfico, 30
  binomial, 145
  capicua, 30
  cinco, 4
  composto, 107, 108, 198
  cúbico, 105
  decomposição em fatores primos, 109
  dois, 4
  hexagonal, 95
  ímpar, 99, 100
  inteiro, 189, 190
  legislação, 45
  natural, 3, 21, 49, 98, 125
  negativo, 189, 190
  oblongo, 96
  oposto, 190
  palíndromo, 30
  par, 99, 100
  pentagonal, 95, 96
  planar, 93, 107
  poliedral, 95
  positivo, 98, 190
  primo, 107, 108, 198
  quadrado, 94–96
  quatro, 4
  retilíneo, 107
  reverso, 28
  sólido, 93
  três, 4
  triangular, 94–96, 122
  um, 4
  unidade, 4
  zero, 97
número natural
  antecessor, 4
  conceito, 4
  conjunto, 5
  gênese, 4
  sucessor, 4
números
  de Fermat, 37
  de Mersenne, 35, 154
  e geometria, 93
números negativos, 189

ordem, 63, 191

parcela, 50
paridade
  mesma, 100
  oposta, 100
Pequeno Teorema de Fermat, 176, 212, 215
potenciação, 67
primaridade, 110, 149
Primeiro Princípio da Indução Completa, 209
primo
  de Euclides, 140
  definição, 108, 198
primos
  gêmeos, 113, 122
  infinitude, 110, 113, 138, 149
  lista, 110, 149
  trigêmeos, 113
primos entre si, 141, 197
Princípio
  Indução, 194, 209
  Menor Número Natural, 64, 194
propriedade
  associativa, 50, 67, 98, 191
  comutativa, 50, 66, 98, 191
  distributiva, 67, 98, 191
  transitiva, 64, 193
prova
  do nove, 81
  real, 80
pulverização, 218, 221

quadrado perfeito, 101

relativamente primos, 141, 197
representação decimal compacta, 27
representação decimal expandida, 27
reserva, 53

Segundo Princípio da Indução Completa, 210
sequência de Fibonacci, 210
sistema de numeração
  aditivo, 10
  alfabético, 13
  ático ou herodiânico, 12
  base cem, 37

base dois, 9
base qualquer, 30
base quatro, 31
base sessenta, 32, 37
base um, 7
binário, 21
Cantor, 34
decimal, 3, 39
definição, 5
demótico, 12
duodecimal, 32
fatorial, 34
hierático, 12
hieroglífico egípcio, 11
hindu, 22, 39
jônico, 13
maia, 39
minóico, 15
mudança de base, 32
posicional, 21
primitivo, 8
romano, 14
siríaco, 17
ternário, 120
soma, 50
somar, 51
subtração, 58, 190

Teorema
Último, de Fermat, 185
da existência e unicidade em sistemas posicionais, 160
de Pitágoras, 179
do algoritmo da divisão, 157, 195
Fundamental da Aritmética, 168
termo, 50
terno pitagórico, 179
caracterização, 181, 183
primitivo, 183
Torre de Hanoi, 213
total, 50
triângulo
heroniano, 186
pitagórico, 186

unidade
conceito, 4
símbolo, 4

valor absoluto, 191